Université de Lille
Licence Mathématiques 2ème année

Année 2017-2018
Semestre 4

# M42 – examen du mercredi 23 mai 2018

*Durée : 3h00.*
*La précision des arguments utilisés et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie.*
*Merci de bien vouloir* encadrer *les résultats obtenus, et de ne pas écrire au crayon à papier.*

**Exercice 1** (questions de cours)**.**

(1) Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle.
   (a) Soit $f$ une forme linéaire non nulle de $E$. Montrer que le noyau $\operatorname{Ker} f$ de $f$ est un hyperplan de $E$.
   (b) Réciproquement, soit $H$ un hyperplan de $E$. Montrer que $H$ est le noyau d'une forme linéaire non nulle de $E$.

(2) Parmi les matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ ci-dessous, précisez celles qui
   (a) représentent la matrice d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée de $\mathbb{C}^2$,
   (b) représentent la matrice d'une forme sesquilinéaire hermitienne de $\mathbb{C}^2$,
   (c) représentent la matrice d'un produit scalaire hermitien de $\mathbb{C}^2$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2i \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ \frac{\sqrt{3}}{2}i & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

   Pour chaque cas, justifier soigneusement les réponses.

**Exercice 2** (étude d'une forme quadratique réelle)**.** Soit $q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$q\big((x,y,z)\big) = x^2 + 4xy + 6xz + 4y^2 + 16yz + 9z^2.$$

(1) Vérifier que $q$ est une forme quadratique et déterminer la forme polaire, que l'on notera $\varphi$, associée à $q$.

(2) Donner la matrice de $\varphi$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(3) Décomposer $q$ en combinaison linéaire de carrés de formes linéaires linéairement indépendantes. En déduire le rang et la signature de $q$.

(4) Déterminer une base $\varphi$-orthogonale de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire une base $\mathscr{E} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que :

$$\forall (i,j) \in \{1,2,3\}^2, \quad i \neq j, \quad \varphi(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0.$$

(5) Quelle est la matrice de $\varphi$ dans la base $\mathscr{E}$ ?

(6) Pour tout réel $\lambda$, on note $v_\lambda = (\lambda, -1, 1)$ et $F_\lambda$ l'orthogonal de $v_\lambda$ pour $\varphi$.
   (a) À quelle condition sur le réel $\lambda$, le vecteur $v_\lambda$ est-il un vecteur isotrope pour $q$ ?
   (b) Montrer : $\dim F_\lambda = 2$.
   (*Indication : on pourra remarquer que $F_\lambda$ est le noyau d'une certaine forme linéaire non nulle ; tout autre méthode correcte permettant de conclure sera acceptée bien entendu.*)
   (c) À quelle condition sur le réel $\lambda$ a-t-on une décomposition en somme directe $F_\lambda \oplus \mathbb{R}v_\lambda$ ? Justifier la réponse.

**Exercice 3** (éléments caractéristiques d'une rotation vectorielle)**.** On considère la matrice

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique. L'espace $\mathbb{R}^3$ est orienté par la base canonique. Soit $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A$.

(1) Montrer que $u$ est une rotation vectorielle de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire un élément de $SO(\mathbb{R}^3)$. Justifier soigneusement la réponse.

(2) À l'aide d'un résultat du cours, justifier que 1 est une valeur propre de $u$ et que l'espace propre de $u$ associé à la valeur propre est de dimension 1.

(3) Déterminer l'axe $\Delta$ et la mesure d'angle $\theta$ de la rotation $u$.

**Exercice 4** (valeurs propres d'un endomorphisme hermitien et norme subordonnée)**.** Soit $E$ un espace vectoriel hermitien de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On note $(\ |\ )$ le produit scalaire hermitien sur $E$ et $\|\cdot\|$ la norme associée. Si $f$ est un endomorphisme de $E$, on définit la *norme subordonnée* de $f$ par :

$$|||f||| = \sup\left\{ \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}\ ;\ x \in E \setminus \{0_E\} \right\}.$$

*On ne demande pas de justifier que ceci définit bien une norme sur $\mathscr{L}(E)$ (voir le cours d'analyse).*

(1) Soit $u$ un endomorphisme hermitien de $E$.

  (a) Montrer que les valeurs propres de $u$ sont réelles. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de $u$, ordonnées de sorte que $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$.

  (b) Soit $x \in E \setminus \{0_E\}$. Établir l'inégalité : $\dfrac{(u(x)|x)}{\|x\|^2} \leqslant \lambda_n$. En déduire :

$$\sup\left\{ \frac{(u(x)|x)}{\|x\|^2}\ ;\ x \in E \setminus \{0_E\} \right\} \leqslant \lambda_n.$$

  (c) Montrer qu'il existe $x \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $\dfrac{(u(x)|x)}{\|x\|^2} = \lambda_n$. En déduire que

$$\lambda_n = \sup\left\{ \frac{(u(x)|x)}{\|x\|^2}\ ;\ x \in E \setminus \{0_E\} \right\}.$$

(2) Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme quelconque de $E$.

  (a) Soit $x \in E$. Montrer : $\big((f^* \circ f)(x)|x\big) = \|f(x)\|^2$.

  (b) Montrer que l'endomorphisme $f^* \circ f$ est un endomorphisme hermitien positif de $E$.

  (c) Déduire de la question (2) (a) que l'on a :

$$|||f|||^2 = \sup\left\{ \frac{\big((f^* \circ f)(x)|x\big)}{\|x\|^2}\ ;\ x \in E \setminus \{0_E\} \right\}$$

  (d) Déduire des questions (1) (d) et (2) (c) que

$$|||f||| = \max\{\sqrt{\lambda} \mid \lambda \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}(f^* \circ f)\}.$$

(3) Application. Déterminer $|||f|||$, où $f$ est l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^2$ est $\begin{pmatrix} 1 & i \\ 2 & 2i \end{pmatrix}$.