Université de Lille
Licence Mathématiques 2ème année

Année 2017-2018
Semestre 4

M42
Formes bilinéaires, espaces euclidiens

rédigé par Anne Moreau

Euclide *(en grec ancien Εὐκλείδης / Eukleidês), né vers -325, mort vers -265 à Alexandrie, est un mathématicien de la Grèce antique, auteur des «Éléments», qui sont considérés comme l'un des textes fondateurs des mathématiques.*

Table des matières

Chapitre 1

Espaces euclidiens

On va généraliser dans ce chapitre la notion d'orthogonalité connue pour les vecteurs du plan ou de l'espace.

1. Formes bilinéaires

Dans cette section, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1. Définitions. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Rappelons qu'une ***application linéaire*** de E dans F est une application u de E dans F telle que :

$$\forall\,(x, y) \in E \times E,\ \forall\,\lambda \in \mathbb{K},\quad u(x + \lambda y) = u(x) + \lambda u(y).$$

Lorsque $F = \mathbb{K}$ (rappelons que $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1), une application linéaire de E dans F est appelée une ***forme linéaire***.

Définition 1 – forme bilinéaire

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle ***forme bilinéaire*** sur E toute application

$$f : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$$

vérifiant les propriétés suivantes :

(i) pour tout $a \in E$, l'application $E \to \mathbb{K}$, $y \to f(a, y)$ est une forme linéaire, i.e.,

$$\forall\,(u, v) \in E \times E,\ \forall\,\lambda \in \mathbb{K},\quad f(a, u + \lambda v) = f(a, u) + \lambda f(a, v).$$

(ii) pour tout $b \in E$, l'application $E \to \mathbb{K}$, $x \to f(x, b)$ est une forme linéaire. i.e.,

$$\forall\,(x, y) \in E \times E,\ \forall\,\alpha \in \mathbb{K},\quad f(x + \alpha y, b) = f(x, b) + \alpha f(v, b).$$

Autrement dit, pour tous $a \in E$ et $b \in E$, les applications $y \mapsto f(a, y)$ et $x \mapsto f(x, b)$ sont des formes linéaires, d'où le terme «forme».

Soit f une application de $E \times E$ dans $\mathbb{K}$. Compte tenu des définitions, dire que f est bilinéaire signifie que pour tous $\alpha, \beta, \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et tous $x, y, u, v \in E$,

$$f(\alpha x + \beta y, \lambda u + \mu v) = \alpha\lambda f(x, u) + \alpha\mu f(x, v) + \beta\lambda f(y, u) + \beta\mu f(y, v).$$

Définition 2 – application symétrique

Une application f de $E \times E$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ est dite ***symétrique*** si l'on a $f(x, y) = f(y, x)$ pour tous $x, y \in E$.

Remarque 1. Si $f : E \times E \to \mathbb{K}$ est symétrique, pour montrer que f est bilinéaire, il suffit de montrer que f est linéaire à droite ou linéaire à gauche.

Exemple 1.

1. Supposons $E = \mathbb{R}^2$. Pour (x, y) et (x', y') dans E, posons :

$$f((x, y), (x', y')) = xx' + yy'.$$

On obtient ainsi une forme bilinéaire sur E.

2. Généralisons l'exemple 1). Supposons $E = \mathbb{K}^n$, et soit $p \in \{1, \ldots, n\}$. Si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ sont des vecteurs de E, posons :

$$f(x, y) = x_1 y_1 + \cdots + x_p y_p.$$

On obtient ainsi une forme bilinéaire sur E.

3. On suppose $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$, et on pose :

$$\forall\, (A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2, \quad f(A, B) = \mathrm{Tr}\,(AB).$$

Alors f est une forme bilinéaire sur E.

4. Supposons $E = \mathbb{R}^2$. Pour (x, y) et (x', y') dans E, posons :

$$f((x, y), (x', y')) = xy'.$$

On obtient ainsi une forme bilinéaire sur E.

5. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. L'application

$$f\colon E \times E \to \mathbb{R}\ ,\ (u, v) \to \int_0^1 u(t)v(t)\, dt$$

est une forme bilinéaire sur E.

Exercice de cours 1. Vérifier dans chacun des exemples ci-dessus que f est en effet une forme bilinéaire. Pour quels exemples f est-elle symétrique ?

1.2. Interprétation matricielle. Supposons que E soit de dimension finie $n > 0$. Soient $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et f une forme bilinéaire sur E. Pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$, posons $a_{ij} = f(e_i, e_j)$ et soit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$,

$$A = \begin{pmatrix} f(e_1, e_1) & \cdots & f(e_1, e_n) \\ \vdots & & \vdots \\ f(e_n, e_1) & \cdots & f(e_n, e_n) \end{pmatrix}.$$

On dit que A est la ***matrice de f dans la base*** $\mathscr{E}$, et on écrit $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(f)$.

⚠ **Attention** : on écrit $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(f)$ bien que f ne soit pas une application linéaire. Il s'agit seulement d'une notation !

Soient $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ et $y = y_1e_1 + \cdots + y_ne_n$ des vecteurs de E. Notons X et Y les matrices de x et y dans la base $\mathscr{E}$:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Compte tenu de la définition 1, il vient :

$$\boxed{f(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, x_iy_j \,=\, {}^tXAY.}$$

(Dans l'expression ci-dessus, on a identifié par un léger abus de notations $\mathscr{M}_1(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$ de sorte que ${}^tXY$ et ${}^tYX$ sont vus comme des réels.)

Proposition 3 – caractérisation matricielle d'une forme bilinéaire symétrique

La forme bilinéaire f est symétrique si et seulement si la matrice A est ***symétrique***, i.e., $A = {}^tA$.

Exercice de cours 2. Démontrer la proposition précédente.

2. Produit scalaire

On suppose désormais que $\boxed{\mathbb{K} = \mathbb{R}}$.

2.1. Définitions.

Définition 4 – forme bilinéaire (définie) positive

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et f une forme bilinéaire.

(i) On dit que f est ***positive*** (resp. ***négative***) si $f(x,x) \geqslant 0$ (resp. $f(x,x) \leqslant 0$) pour tout $x \in E$.

(ii) On dit que f est ***définie positive*** (resp. ***définie négative***) si elle est positive (resp. négative) et si $f(x,x) = 0$ si et seulement si x est nul.

Remarque 2. Pour toute forme bilinéaire f de E, on a

$$f(0_E, 0_E) = 0$$

car $f(0_E, 0_E) = f(0 \times 0_E, 0_E) = 0 \times f(0_E, 0_E) = 0$ par linéarité à gauche. Par conséquent, pour montrer que f est définie positive, il suffit de montrer que

$$(f(x,x) = 0) \;\Rightarrow\; (x = 0_E)\,.$$

Exercice de cours 3. Reprendre les exemples de l'exercice 1 avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Quels sont ceux pour lesquels f est positive ? définie positive ?

Définition 5 – produit scalaire et espace euclidien

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On appelle ***produit scalaire (euclidien)*** sur E toute forme bilinéaire sur E qui est symétrique et définie positive. Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire est appelé un ***espace (vectoriel) euclidien***.

Euclide *(en grec ancien Εὐκλείδης / Eukleidês), né vers -325, mort vers -265 à Alexandrie, est un mathématicien de la Grèce antique, auteur des «Éléments», qui sont considérés comme l'un des textes fondateurs des mathématiques.*

Exercice de cours 4. Reprendre les exemples de l'exercice 1 avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Quels sont ceux pour lesquels f est un produit scalaire ?

Remarque 3. Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie possède toujours au moins un produit scalaire mais il en a en général plusieurs !

Exemple 2 (Exemple fondamental). Dans $\mathbb{R}^n$, l'exemple 2) de l'exercice 1 avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ appelé le ***produit scalaire canonique***. Cet exemple sera crucial dans le cours et nous commencerons bon nombre d'exercices par : «On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique… » ou «Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique… », etc.

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ a d'autres produits scalaires : considérons une base quelconque $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et posons, pour $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$ et $y = \mu_1 e_1 + \cdots + \mu_n e_n$,

$$f(x,y) = \lambda_1\mu_1 + \cdots + \lambda_n\mu_n.$$

On vérifie que f est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, en général différent du produit scalaire canonique.

2.2. Premières propriétés. Désormais, E désigne un espace vectoriel euclidien ; en particulier, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Si $x, y \in E$, on note $(x \,|\, y)$ le produit scalaire de x et y. L'application

$$E \times E \to \mathbb{R}\ ,\ (x, y) \to (x \,|\, y)$$

est donc une forme bilinéaire symétrique et définie positive sur E. On a $(x \,|\, x) \geqslant 0$ pour tout $x \in E$. On peut donc considérer :

$$\|x\| = \sqrt{(x|x)}.$$

Proposition 6 – propriétés du produit scalaire

Soient $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :
- (i) $\|\lambda x\| = |\lambda|\, \|x\|$,
- (ii) $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x \,|\, y) + \|y\|^2$,
- (iii) $|(x \,|\, y)| \leqslant \|x\|.\|y\|$ (inégalité de Cauchy-Schwarz),
- (iv) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire),
- (v) $|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x - y\|$,
- (vi) $2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2$ (identité de la médiane ou identité du parallélogramme).

Augustin Louis, baron Cauchy*, né à Paris le 21 août 1789 et mort à Sceaux (Hauts-de-Seine) le 23 mai 1857, est un mathématicien français, membre de l'Académie des sciences et professeur à l'École polytechnique.*

Hermann Amandus Schwarz*, né le 25 janvier 1843 à Hermsdorf, en Silésie (aujourd'hui la ville de Jerzmanowa en Pologne) et mort le 30 novembre 1921 à Berlin est un mathématicien allemand. Ses travaux sont marqués par une forte interaction entre l'analyse et la géométrie.*

Remarque 4. L'assertion (vi) de la proposition s'interprète géométriquement de la façon suivante. Soit ABC un triangle quelconque du plan, et soit I le milieu du segment $[B, C]$. Alors on a

$$AB^2 + AC^2 = 2BI^2 + 2AI^2.$$

Exercice de cours 5.

1. Illustrer la proposition 6 et la remarque 4.

2. Démontrer la proposition 6.

Définition 7 – norme d'un espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appelle ***norme*** sur E toute application N de E dans $\mathbb{R}_+$ qui vérifie, pour tout scalaire λ et tous vecteurs x, y de E, les conditions suivantes :
- (i) $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ (homogénéité),
- (ii) $N(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$ (définie),
- (iii) $N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$ (inégalité triangulaire).

On dit que $x \in E$ est ***unitaire*** si $\|x\| = 1$.

Théorème 8 – norme associée à un produit scalaire

L'application de E dans $\mathbb{R}_+$ qui à x dans E associe $\|x\|$ est une norme sur E.

Remarque 5. Il existe des normes sur E qui ne sont pas issues d'un produit scalaire (voir le cours sur les fonctions de plusieurs variables).

Exercice de cours 6. Démontrer ce théorème.

2.3. Vecteurs orthogonaux.

Définition 9 – vecteurs orthogonaux

Soit E un espace euclidien.

(i) On dit que des vecteurs x, y de E sont ***orthogonaux*** si $(x \mid y) = 0$ (ce qui équivaut à $(y \mid x) = 0$).

(ii) Deux parties non vides A, B de E sont dites ***orthogonales*** si, pour tout $x \in A$ et tout $y \in B$, x et y sont orthogonaux.

Proposition 10 – l'orthogonal d'une partie est un espace vectoriel

Soit A une partie non vide de E. L'ensemble des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de A est un sous-espace vectoriel de E, noté $A^\perp$, et appelé l'***orthogonal*** de A (dans E).

Exercice de cours 7.

1. Démontrer cette proposition.

2. Quel est l'orthogonal de E dans E ? l'orthogonal de $\{0_E\}$ dans E ?

3. Calculer l'orthogonal de $(1, 2, -1)$ dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne.

Définition 11 – famille et base orthogonales/orthonormales

Soit $\mathscr{X} = (x_1, \ldots, x_p)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel euclidien E.
(i) On dit que $\mathscr{X}$ est ***orthogonale*** si $(x_i \mid x_j) = 0$ pour tous $i, j \in \{1, \ldots, p\}$ tels que $i \neq j$.
(ii) On dit que $\mathscr{X}$ est ***orthonormée*** ou ***orthonormale*** si elle est orthogonale et si tous les vecteurs x_i sont unitaires (i.e., $\forall\, i \in \{1, \ldots, p\}$, $\|x_i\| = 1$).

Théorème 12 – théorème de Pythagore

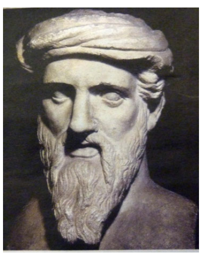
Soit $\mathscr{X} = (x_1, \ldots, x_p)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel euclidien E.

(i) On suppose que la famille $\mathscr{X}$ est orthogonale. On a :

$$\Big\| \sum_{k=1}^{p} x_k \Big\|^2 = \sum_{k=1}^{p} \|x_k\|^2.$$

(ii) Si la famille $\mathscr{X}$ est orthogonale et si $x_k \neq 0$ pour tout $k \in \{1, \ldots, p\}$, alors la famille $\mathscr{X}$ est libre. En particulier, si $\mathscr{X}$ est orthonormée, alors $\mathscr{X}$ est libre.

Pythagore *(en grec ancien Πυθαγόρας / Pythagóras) est un philosophe, mathématicien et scientifique présocratique qui serait né aux environs de 580 av. J.-C. à Samos, une île de la mer Égée au Sud-Est de la ville d'Athènes ; on établit sa mort vers 495 av. J.-C., à l'âge de 85 ans.*

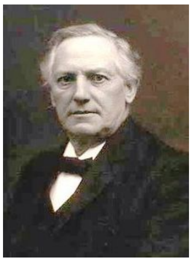


Exercice de cours 8. Démontrer ce théorème.

3. Bases orthonormées

3.1. Le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt et ses conséquences.

Jørgen Pedersen Gram *est un mathématicien danois né le 27 juin 1850 à Nustrup (près de Haderslev) et mort le 29 avril 1916 à Copenhague.*



Erhard Schmidt *(13 janvier 1876 - 6 décembre 1959) était un mathématicien allemand né à Dorpat, en Allemagne (aujourd'hui Tartu, en Estonie).*

Rappel. Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $e_1, \ldots, e_p$ des vecteurs de E. Le ***sous-espace engendré par*** $e_1, \ldots, e_p$, noté $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$, est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs $e_1, \ldots, e_p$, i.e.,

$$\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p) := \{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i \ ; \ (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de E et c'est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $e_1, \ldots, e_p$. De plus, si $(e_1, \ldots, e_p)$ est une famille libre de E, alors c'est une base de $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$.

Théorème 13 – procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soient E un espace vectoriel euclidien de dimension finie $n > 0$ et $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Il existe une base $\mathscr{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ de E possédant les propriétés suivantes :

(i) $\mathscr{F}$ est une famille orthonormée, i.e., $(f_i \,|\, f_j) = 0$ pour tout $i \neq j$ et $\|f_i\| = 1$ pour tout i,

(ii) Pour $j \in \{1, \ldots, n\}$, on a $\mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_j) = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_j)$.

De plus, on construit les vecteurs $f_1, \ldots, f_n$ par récurrence, selon un procédé appelé le ***procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt***, comme suit :

(1) On pose

$$f_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}.$$

(2) On suppose avoir construit une famille orthonormée $(f_1, \ldots, f_j)$ pour un certain $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ telle que $\mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_k) = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$ pour tout $k \leqslant j$. On définit alors f_{j+1} par :

$$f_{j+1} = \frac{e_{j+1} - \sum\limits_{k=1}^{j} (e_{j+1} \,|\, f_k) f_k}{\|e_{j+1} - \sum\limits_{k=1}^{j} (e_{j+1} \,|\, f_k) f_k\|}.$$

Exercice de cours 9. Démontrer ce théorème et illustrer la construction par une figure.

Le résultat suivant est évident d'après le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt mais repose sur l'existence (non triviale) de bases dans un espace vectoriel de dimension finie :

Corollaire 14 – existence de bases orthonormées

Si E est un espace euclidien non réduit à $\{0_E\}$, il possède des bases orthonormées.

Ce corollaire est crucial. Grâce à lui, il sera désormais légitime de commencer un énoncé par «Soient E un espace euclidien et $\mathscr{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E...» ce que nous ferons très souvent.

⚠ **Attention** : comme pour les espaces vectoriels de dimension finie, un espace vectoriel euclidien n'a pas une unique base orthonormée. La phrase «Soit $\mathscr{E}$ la base orthonormée de E. . . » n'a donc aucun sens !

EXEMPLE 3 (Exemple fondamental). Dans $\mathbb{R}^n$, la base canonique

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

est orthonormée pour le produit scalaire canonique.

Exercice de cours 10. Vérifier cette assertion et donner d'autres exemples de bases orthonormées dans $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$.

Exercice de cours 11. Soit $E = \mathbb{R}^3$. Déterminer, grâce au procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, une base orthonormée de $F = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ où $\varepsilon_1 = (1, -1, 0)$ et $\varepsilon_2 = (0, 2, 1)$.

Supposons E de dimension finie $n > 0$, et soit $\mathscr{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E. Soient $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$ et $y = \mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n$ des vecteurs de E. Notons X et Y les matrices de x et y dans la base $\mathscr{E}$. On a alors :

$$(x \,|\, y) = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \mu_j (e_i | e_j).$$

La base $\mathscr{E}$ étant orthonormée, il vient donc :

$$\boxed{(x \,|\, y) = \lambda_1 \mu_1 + \dots + \lambda_n \mu_n = {}^t XY = {}^t YX.}$$

Théorème 15 – théorème de la base orthonormée incomplète et conséquences

Soit E un espace euclidien de dimension finie non nulle n.

(i) Soit $\mathscr{E} = (e_1, \dots, e_p)$, avec $1 \leqslant p < n$, une famille orthonormée de vecteurs de E. Il existe $e_{p+1}, \dots, e_n \in E$ tels que $(e_1, \dots, e_n)$ soit une base orthonormée de E.

(ii) Soit F un sous-espace vectoriel de E. On a :

$$E = F \oplus F^{\perp}.$$

En particulier :

$$\dim F^{\perp} = \dim E - \dim F.$$

Exercice de cours 12. Démontrer ce théorème à l'aide du théorème de la base incomplète «classique».

3.2. Projections orthogonales.

Rappel. Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et F, G deux sous-espaces vectoriels de E, supplémentaires dans E, i.e., $E = F \oplus G$. La projection de E sur F parallèlement à G est l'application (linéaire) $p_{F,G}$ de E dans E définie pour tout x de E par $p_{F,G}(x) = x_F$ où $x = x_F + x_G$ est l'unique décomposition de x comme somme d'un vecteur x_F de F et d'un vecteur x_G de G.

Revenons au cas où E est un espace euclidien. Soit F un sous-espace de E. On a $E = F \oplus F^{\perp}$. On peut donc considérer la projection de E sur F parallèlement à $F^{\perp}$. On dit que c'est la ***projection orthogonale de E sur F***. On la notera p_F.

Exercice de cours 13.

1. Soit $\mathscr{F} = (e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormée de F, que l'on complète en une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de E à l'aide du théorème 15. Montrer que pour tout $x \in E$,

$$\boxed{p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} (x|e_i)e_i.}$$

2. Réinterpréter le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt en terme de projections orthogonales.

4. Adjoint d'un endomorphisme

Dans tout cette section, E est un espace vectoriel euclidien de dimension finie $n > 0$.

Théorème-Définition 16 – existence et unicité de l'adjoint d'un endomorphisme

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Il existe un et un seul endomorphisme de E, noté u^*, et appelé l'***adjoint*** de u, tel que pour tous $x, y \in E$,

$$(u(x) \mid y) = (x \mid u^*(y))$$

Si $\mathscr{E}$ est une base orthonormée de E, on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(u^*) = {}^t\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(u).$$

⚠ **Attention** : La matrice de u^* dans la base $\mathscr{E}$ est la transposée de la matrice de u dans cette même base si $\mathscr{E}$ est une base orthonormée.

Exercice de cours 14. Démontrer ce théorème.

Proposition 17 – propriétés de l'adjoint

Soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors :

(i) $(\lambda u + \mu v)^* = \lambda u^* + \mu v^*$.
(ii) $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$.
(iii) $(u^*)^* = u$.
(iv) On a $(\mathrm{Id}_E)^* = \mathrm{Id}_E$ et, si $u \in GL(E)$, alors $u^* \in GL(E)$ et $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$.

Exercice de cours 15. Démontrer la proposition.

5. Endomorphismes orthogonaux et matrices orthogonales

Proposition-Définition 18 – endomorphismes orthogonaux

Soient E un espace euclidien de dimension finie $n > 0$ et $u \in \mathscr{L}(E)$. On dit que u est un ***endomorphisme orthogonal*** si l'une des deux conditions suivantes équivalentes est vérifiée :

(i) $\forall\, x, y \in E,\ (u(x) \mid u(y)) = (x \mid y)$,
(ii) $\forall\, x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|$.

Exercice de cours 16. Démontrer la proposition.

Définition 19 – matrice orthogonale

Une matrice $\Omega \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite ***orthogonale*** si

$$\Omega\,{}^t\Omega \;=\; {}^t\Omega\,\Omega \;=\; I_n.$$

En particulier, si Ω est orthogonale alors Ω est inversible et $\Omega^{-1} = {}^t\Omega$.

Le théorème suivant justifie l'appellation «orthogonale» de la définition précédente :

Théorème 20 – différentes caractérisations des endomorphismes orthogonaux

Soient E un espace euclidien de dimension finie $n > 0$ et $u \in \mathscr{L}(E)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) u est un endomorphisme orthogonal,
(ii) $u \in GL(E)$ et $u^* = u^{-1}$,
(iii) il existe une base orthonormée $\mathscr{E}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(u) \in O(n)$,
(iv) pour toute base orthonormée $\mathscr{E}$ de E, on a $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(u) \in O(n)$,
(v) il existe une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ soit une base orthonormée de E,
(vi) pour toute base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de E, $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est une base orthonormée de E.

⚠ **Attention** : là encore, la matrice d'un endomorphisme orthogonal dans une base $\mathscr{E}$ est orthogonale si $\mathscr{E}$ est une base orthonormée.

Exercice de cours 17. Démontrer ce théorème.

Exercice de cours 18.

1. Montrer que l'ensemble des matrices orthogonales d'ordre n est un sous-groupe du groupe $GL_n(\mathbb{R})$.

On le note $O(n)$, et on dit que c'est le ***groupe orthogonal de degré*** n. Si $\Omega \in O(n)$, de $\Omega^t\Omega = I_n$, on déduit $(\det \Omega)^2 = 1$, donc $\det \Omega = \pm 1$. On pose :

$$SO(n) = \{\Omega \in O(n) \mid \det \Omega = 1\}, \quad O^-(n) = \{\Omega \in O(n) \mid \det \Omega = -1\}.$$

2. Montrer que l'ensemble $SO(n)$ est un sous-groupe de $O(n)$, appelé le ***groupe spécial orthogonal de degré*** n. Qu'en est-il de l'ensemble $O^-(n)$?

Il sera parfois très utile d'avoir à l'esprit le résultat suivant :

Corollaire 21 – interprétation matricielle des endomorphismes orthogonaux

Soit $\Omega \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On a l'équivalence : Ω est une matrice orthogonale si et seulement si Ω est la matrice de passage d'une base orthonormée $\mathscr{E}$ de E à une base orthonormée $\mathscr{F}$ de E.

On note $O(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E.

Exercice de cours 19.

1. Montrer que $O(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$. On dit que c'est le ***groupe orthogonal*** de E.

On rappelle que le déterminant d'un endomorphisme f de E est le déterminant de sa matrice dans n'importe quelle base de E (cette définition ne dépend pas du choix de la base : voir le cours de première année).

2. Montrer que si $u \in O(E)$, on a $\det u = \pm 1$.

On pose :

$$SO(E) = \{u \in O(E) \mid \det u = 1\}, \quad O^-(E) = \{u \in \mathscr{L}(E) \mid \det u = -1\}.$$

3. Vérifier que $SO(E)$ est un sous-groupe de $O(E)$. Qu'en est-il de l'ensemble $O^-(E)$?

On dit que $SO(E)$ est le ***groupe spécial orthogonal*** de E. Un élément de $SO(E)$ est appelé une ***rotation*** de E. Cette appellation sera justifiée dans le cas où $n = 2$ et $n = 3$ au chapitre suivant.

⚠ **Attention** : le fait que $\det u = \pm 1$ n'implique pas que u soit un endomorphisme orthogonal de E. Par exemple, $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$ mais $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin O(2)$ (à vérifier).

6. Endomorphismes symétriques

Théorème-Définition 22 – endomorphismes symétriques

Soient E un espace euclidien et $u \in \mathscr{L}(E)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $u = u^*$,

(ii) il existe une base orthonormée $\mathscr{E}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(u)$ soit symétrique,

(iii) pour toute base orthonormée $\mathscr{E}$ de E, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(u)$ est symétrique.

Si ces conditions sont réalisées, on dit que u est un endomorphisme ***symétrique*** ou ***auto-adjoint*** de E.

Exemple 4. **1.** L'identité, l'endomorphisme nul et les homothéties vectorielles sont des endomorphismes symétriques de E.

2. Les projecteurs orthogonaux sont des endomorphismes symétriques.

Exercice de cours 20. Démontrer ce théorème.

Dans la suite, on note $\mathscr{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de E ; c'est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$. On désigne par $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices d'ordre n qui sont symétriques.

⚠ **Attention** : la matrice d'un endomorphisme symétrique dans une base $\mathscr{E}$ de E n'est pas toujours symétrique ! Elle l'est si $\mathscr{E}$ est une base orthonormée... D'autre part, si $\mathscr{E}$ est une base quelconque de E et $u \in \mathscr{L}(E)$, il se peut que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(u)$ soit symétrique sans que u soit symétrique !

Exemple 5. Soient $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Considérons l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^2$ défini par $u(x) = \lambda_1 e_1 - \lambda_2 e_2$ où $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 \in \mathbb{R}^2$. La matrice de u dans la base (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$ est alors $\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2)}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Pourtant, u n'est pas un endomorphisme symétrique de l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire canonique.

Exercice de cours 21. Soient $u \in \mathscr{S}(E)$ et F un sous-espace stable par u. Montrer que $F^\perp$ est stable par u.

Exercice de cours 22. Soient F, G des sous-espaces supplémentaires de E et p la projection sur F parallèlement à G. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $p \in \mathscr{S}(E)$,

(ii) $G = F^\perp$.

Le théorème suivant est tout à fait fondamental, d'où le nom qu'on va lui donner dans ce cours :

Théorème 23 – théorème fondamental

Soient E un espace euclidien et u un endomorphisme symétrique de E. Alors il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres pour u.

Exercice de cours 23. Démontrer ce théorème.

La version matricielle du théorème fondamental est la suivante (ce résultat est également crucial) :

Corollaire 24 – version matricielle du théorème fondamental

Si $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe une matrice orthogonale $\Omega \in O(n)$ telle que $\Omega^{-1} A \Omega = {}^t\Omega A \Omega$ soit diagonale. Autrement dit, une matrice symétrique réelle est diagonalisable en base orthonormée.

Définition 25 – endomorphismes symétriques positifs et définis positifs

On dit que qu'un endomorphisme symétrique $u \in \mathscr{S}(E)$ est ***positif*** (resp. ***défini positif***) si $\mathrm{Spec}(u) \subset \mathbb{R}_+$ (resp. $\mathrm{Spec}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$). On note $\mathscr{S}^+(E)$ (resp. $\mathscr{S}^{++}(E)$) l'ensemble des endomorphismes symétriques positifs (resp. symétriques définis positifs). On adopte une terminologie analogue pour les matrices, et on note $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ les ensembles correspondants.

Exercice de cours 24. Soient F, G des sous-espaces supplémentaires de E. Alors tout élément x de E s'écrit $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$. On rappelle que la *symétrie* s par rapport à F parallèlement à G est définie par

$$\begin{array}{rccl} s : & E & \longrightarrow & E \\ & x = x_F + x_G & \longmapsto & x_F - x_G. \end{array}$$

1. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $s \in O(E)$,
(ii) $s \in \mathscr{S}(E)$,
(iii) $G = F^\perp$.

Si elles sont réalisées, on dit que s est la ***symétrie orthogonale*** par rapport à F, et on la note s_F.

Si $\dim E \geqslant 2$ et si F est un hyperplan de E, on dit que s_F est la ***réflexion*** d'hyperplan F.

2. Donner une expression simple de $s(x)$, pour $x \in E$, lorsque s est une réflexion.

Remarque 6. Les symétries orthogonales sont des endomorphismes à la fois symétriques et orthogonaux.

⚠ **Attention** : une symétrie (quelconque) n'est pas toujours un endomorphisme symétrique !

Chapitre 2

Espaces euclidiens de dimension 2 ou 3

1. Étude en dimension 2

Dans tout ce chapitre E est un espace euclidien de dimension 2 ou 3. En particulier, E est un espace vectoriel réel.

1.1. Description du groupe spécial $SO(2)$. Rappelons que $SO(2)$ est l'ensemble des matrices réelles $\Omega \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $\Omega^t\Omega = I_2$ et $\det \Omega = 1$. Soit :

$$\Omega = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SO(2).$$

On a $\det \Omega = ad - bc = 1$. Par suite :

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \Omega^{-1} = {}^t\Omega = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

On en déduit :

$$\Omega = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \ , \ a^2 + b^2 = 1.$$

On sait alors qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$, défini à 2π près, tel que :

$$\Omega = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \Omega(\theta).$$

Réciproquement, on vérifie : $\Omega(\theta) \in SO(2)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

On a donc obtenu :

Théorème 26 – description du groupe $SO(2)$

Le groupe $SO(2)$ est commutatif, et $SO(2) = \{\Omega(\theta)\,;\ \theta \in \mathbb{R}\}$.

Remarque 7. Le fait que $SO(2)$ soit commutatif est fondamental, tant d'un point de vue mathématique que physique.

Exercice de cours 25. Vérifier la première assertion du théorème.

1.2. Orientation. Les matrices $\Omega(\theta)$ sont appelées des ***matrices de rotations***. Rappelons que les éléments de $SO(E)$, pour E un espace euclidien, sont appelés des rotations vectorielles. Justifions comme promis ici cette appellation. Considérons l'espace euclidien $E = \mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire canonique et soit $\mathscr{E} = (e_1, e_2)$ sa base canonique, i.e.,

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $u \in SO(E)$. Alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(u) \in SO(2)$; c'est donc une matrice de rotation et il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(u) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \Omega(\theta).$$

Exercice de cours 26. Représenter sur une figure les vecteurs $e_1, e_2, u(e_1), u(e_2)$ de $\mathbb{R}^2$.

Compte tenu de la figure obtenue à l'exercice précédent, on aimerait dire que u est *la* rotation d'angle θ (et de centre $0_{\mathbb{R}_2}$) où θ est défini à 2π près. Malheureusement, pour que cette définition ait un sens, il faudrait que l'angle (même défini à 2π près) de la rotation u ne dépende pas de la base orthonormée choisie.

Or ce n'est pas le cas ! En effet, on vérifie par exemple que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}'}(u) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \Omega(-\theta),$$

où $\mathscr{E}'$ est la base orthonormée $(-e_1, e_2)$ de $\mathbb{R}^2$ (toujours muni de son produit scalaire canonique).

Cette petite discussion justifie la notion d'***orientation*** que nous allons introduire maintenant (de façon plus rigoureuse que celle vue dans les classes antérieures).

Supposons $\dim E = 2$, et soit $u \in SO(E)$. Soient $\mathscr{E}, \mathscr{F}$ des bases orthonormées de E, et Ω la matrice de passage de $\mathscr{E}$ à $\mathscr{F}$. Rappelons qu'on a alors $\Omega \in O(2)$ (cf. Corollaire 21). D'autre part, comme $u \in SO(E)$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(u) = \Omega(\theta)$. Alors, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{F}}(u) = \Omega^{-1}\Omega(\theta)\Omega$. Il y a alors deux cas possibles :

- $\Omega \in SO(2)$, et alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{F}}(u) = \Omega(\theta) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(u)$,
- $\Omega \in O^-(2)$, et alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{F}}(u) = \Omega(-\theta)$.

Exercice de cours 27. Justifier ces assertions.

Définition 27 – orientation d'un espace euclidien de dimension 2

Soient $\mathscr{E}, \mathscr{F}$ des bases orthonormées de E, et $\Omega = P_{\mathscr{E}}^{\mathscr{F}}$ la matrice de passage de $\mathscr{E}$ à $\mathscr{F}$. On dit que $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ définissent la ***même orientation*** de E si $\Omega \in SO(2)$.
Par définition, ***orienter*** E, c'est fixer une base orthonormée de E. Les bases orthonormées ***directes*** $\mathscr{F}$ sont alors celles pour lesquelles $\det P_{\mathscr{E}}^{\mathscr{F}} = 1$. Les bases orthonormées ***indirectes*** $\mathscr{F}$ sont alors celles pour lesquelles $\det P_{\mathscr{E}}^{\mathscr{F}} = -1$.

Proposition-Définition 28 – mesure d'angle d'une rotation dans un plan euclidien orienté

Supposons toujours $\dim E = 2$, et soit $u \in SO(E)$. L'espace E étant orienté, d'après ce qui précède, il existe un réel θ, uniquement déterminé modulo 2π, tel que l'on ait $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(u) = \Omega(\theta)$ pour toute base orthonormée directe de E. On dit que θ est ***une mesure d'angle*** de la rotation u.

On dit «une» mesure d'angle de la rotation u , et non «la» mesure d'angle de la rotation u car celle-ci n'est définie qu'à 2π près. Mais les expressions «l'angle de la rotation u» ou «la mesure d'angle de la rotation u» sont tolérées ; il faut alors garder à l'esprit que la mesure d'angle n'est définie qu'à 2π près.

⚠ **Attention** : en revanche, parler d'une mesure d'angle d'une rotation u d'un espace vectoriel euclidien E n'a de sens que si E est orienté. Sur ce point, il n'y a aucune tolérance !

1.3. Description de l'ensemble $O^-(2)$. Rappelons que $O^-(2)$ est l'ensemble des matrices réelles $\Omega \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $\Omega^t\Omega = I_2$ et $\det \Omega = -1$. Soit :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O^-(2).$$

On a $\det \Lambda = ad - bc = -1$. Par suite :

$$\begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \Lambda^{-1} = {}^t\Lambda = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

On en déduit :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \ , \ a^2 + b^2 = 1.$$

On voit comme précédemment qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$, défini à 2π près, tel que :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = \Lambda(\theta).$$

Réciproquement, on vérifie : $\Lambda(\theta) \in O^-(2)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

D'autre part, posant :

$$X_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix} \ , \ Y_\theta = \begin{pmatrix} \sin(\theta/2) \\ -\cos(\theta/2) \end{pmatrix},$$

il vient :

$$\Lambda(\theta)X_\theta = X_\theta \ , \ \Lambda(\theta)Y_\theta = -Y_\theta.$$

On a donc obtenu le résultat suivant :

Théorème 29 – description de l'ensemble $O^-(2)$

On a $O^-(2) = \{\Lambda(\theta);\ \theta \in \mathbb{R}\}$, et tout élément de $O^-(2)$ est une matrice de réflexion.

Exercice de cours 28. Justifier ce théorème et faire une figure (on représentera en particulier l'axe de la réflexion).

2. Étude en dimension 3

2.1. Orientation. Dans ce paragraphe, on suppose temporairement que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension finie $n > 0$. Pour toutes bases orthonormées $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ de E, on a $P_{\mathscr{E}}^{\mathscr{F}} \in O(n)$ (cf. corollaire 21). Il y a donc deux cas possibles :

- ou bien $\det P_{\mathscr{E}}^{\mathscr{F}} = 1$,
- ou bien $\det P_{\mathscr{E}}^{\mathscr{F}} = -1$.

Ceci motive la définition suivante qui généralise la notion d'orientation vue dans le cas $n = 2$:

Définition 30 – orientation d'un espace euclidien

Par définition, ***orienter*** E, c'est choisir une base orthonormée de E. On dit aussi dans ce cas qu'on a choisi une ***orientation*** de E.
Fixons une base orthonormée $\mathscr{E}$ de E, d'où une orientation de E. Soit $\mathscr{F}$ une base orthonormée de E. On dit que $\mathscr{F}$ est base orthonormée ***directe*** si $\det P_{\mathscr{E}}^{\mathscr{F}} = 1$; on dit que $\mathscr{F}$ est base orthonormée ***indirecte*** si $\det P_{\mathscr{E}}^{\mathscr{F}} = -1$.

2.2. Produit mixte, produit vectoriel.

Désormais, E est un espace vectoriel euclidien $\boxed{\text{orienté de dimension 3}}$.

Proposition-Définition 31 – produit mixte de trois vecteurs

Soit $\mathscr{U} = (u, v, w)$ une famille de trois vecteurs de E. Le réel $\det_{\mathscr{E}} \mathscr{U}$ est indépendant de la base <u>orthonormée directe</u> de E. On dit que c'est le ***produit mixte*** de $\mathscr{U}$, et on le note $[u, v, w]$.

Exercice de cours 29. Démontrer cette proposition

Exercice de cours 30. Démontrer les propriétés suivantes :

(i) $[u, v, w] = -[v, u, w] = -[u, w, v] = -[w, v, u]$,
(ii) pour tous $v, w \in E$, l'application $E \to \mathbb{R}$, $u \to [u, v, w]$ est linéaire,
(iii) on a $[u, v, w] = 0$ si et seulement si la famille (u, v, w) est liée,
(iv) si (u, v, w) est une base orthonormée directe (resp. indirecte) de E, alors $[u, v, w] = 1$ (resp. $[u, v, w] = -1$).

Théorème-Définition 32 – produit vectoriel de deux vecteurs

Soient $u, v \in E$. Il existe un et un seul vecteur $w \in E$ tel que

$$[u, v, x] = (w \mid x)$$

pour tout vecteur $x \in E$. On dit que w est le ***produit vectoriel*** de u et v (pris dans cet ordre), et on note $w = u \wedge v$.

Exercice de cours 31.

1. Démontrer ce théorème.

2. Montrer que pour tous $u, v \in E$, on a $v \wedge u = -u \wedge v$.

3. Montrer que pour tout $u \in E$, l'application $v \mapsto u \wedge v$ est linéaire, autrement dit que pour tous $v, v' \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $u \wedge (v + \lambda v') = u \wedge v + \lambda\, u \wedge v'$.

Exercice de cours 32. Soient $u, v \in E$, $w = u \wedge v$. Montrer les propriétés suivantes :

(i) on a $w = 0$ si, et seulement si, u et v sont colinéaires,

(ii) le vecteur w est orthogonal à u et à v,

(iii) si la famille (u, v) est orthonormée, alors la famille (u, v, w) est une base orthonormée directe de E,

(iv) soient $\mathscr{E}$ une base orthonormée directe de E, $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ les composantes de u dans cette base, et $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ celles de v, i.e.,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(u) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(v) = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}.$$

Alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(w) = \begin{pmatrix} \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 \\ \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3 \\ \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \end{pmatrix}.$$

Remarque 8. D'après ce qui précède, si la famille (u, v) est orthonormée, alors $(u, v, u \wedge v)$ est une base orthonormée directe de E. Cette remarque sera très importante dans la pratique : elle donne une méthode simple pour construire une base orthonormée directe de E dès lors qu'on a deux vecteurs unitaires orthogonaux.

Exercice de cours 33. Soient $u, v \in E$ de composantes $(3, 2, 2)$ et $(1, -2, 3)$. Déterminer les composantes de $u \wedge v$.

2.3. Rotations en dimension 3. Dans ce paragraphe, E est un espace vectoriel euclidien de $\boxed{\text{dimension } 3}$.

Exercice de cours 34. Soit $u \in SO(E)$.

1. Montrer que $1 \in \mathrm{Spec}(u)$.

2. Supposons $u \neq \mathrm{Id}_E$. Montrer que l'espace propre pour u associé à la valeur propre 1 est de dimension 1.

Supposons E orienté, et fixons une base orthonormée directe $\mathscr{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de E. Soit $u \in SO(E) \setminus \{\mathrm{Id}_E\}$.

D'après l'exercice précédent, il existe un vecteur unitaire $f_1 \in E$, uniquement déterminé au signe près, tel que $u(f_1) = f_1$. Complétons-le pour obtenir une base orthonormée directe $\mathscr{F} = (f_1, f_2, f_3)$ de E. Par exemple, on prend f_2 unitaire orthogonal à f_1, et $f_3 = f_1 \wedge f_2$. Si $F = (\mathrm{Vect} f_1)^\perp = \mathrm{Vect}(f_2, f_3)$, alors F est stable par u.

D'après l'étude des rotations en dimension 2, il existe $\theta \in \mathbb{R}$, uniquement déterminé modulo 2π, et tel que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{F}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = R(\theta).$$

Définition 33 – éléments caractéristiques d'une rotation

Soient $f_1 \in E$ tel que $\|f_1\| = 1$, Δ la droite dirigée et orientée par f_1, et $\theta \in \mathbb{R}$. On appelle ***rotation d'axe Δ et d'angle θ***, et on note $r_{\Delta,\theta}$, l'endomorphisme de E dont la matrice dans une base orthonormée directe (f_1, f_2, f_3), commençant par f_1, est $R(\theta)$.

Question. Si $u \in SO(E) \setminus \{\mathrm{Id}_E\}$, comment déterminer en pratique l'axe et l'angle de la rotation u, c'est-à-dire f_1 et θ dans les notations précédentes ?

Réponse. Dans la pratique, u est donné par $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(u)$ (avec $A \neq I_3$). On détermine f_1 en écrivant $u(f_1) = f_1$. Autrement dit, il s'agit de rechercher la droite propre de u associée à la valeur propre 1. On prend alors pour f_1 n'importe quel générateur de cette droite de norme 1.

D'autre part :

$$\mathrm{Tr}\, A = \mathrm{Tr}\, R(\theta) = 1 + 2\cos\theta.$$

D'où la détermination de $\cos\theta$. Reste à déterminer $\sin\theta$. Soit $x \in E$ non colinéaire à f_1. Notons α, β, γ les composantes de x dans la base orthonormée (f_1, f_2, f_3). On a alors :

$$[x, u(x), f_1] = (\beta^2 + \gamma^2) \sin\theta.$$

Comme $\beta^2 + \gamma^2 > 0$ (car x n'est pas colinéaire à f_1), $\sin\theta$ est du signe du produit mixte $[x, u(x), f_1]$. En pratique, on choisit x parmi un vecteur de la base $\mathscr{E}$ et on calcule ce produit mixte par un déterminant dans la base orthonormée directe $\mathscr{E}$ de E.

Exercice de cours 35. Vérifier ces assertions.

En résumé, on retient :

1. La droite supportant l'axe Δ de u est l'ensemble des invariants de u, obtenu en résolvant $AX = X$, où $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
2. On détermine θ par :
   - $\operatorname{Tr} A = 1 + 2\cos\theta$,
   - $\sin\theta$ est du signe du produit mixte $[x, u(x), f_1]$ pour n'importe quel x non colinéaire à f_1, où f_1 est le vecteur normé dirigeant et orientant l'axe Δ de u.

Remarque 9. Pour déterminer $\sin\theta$, on peut aussi procéder comme suit. Un calcul facile montre que :

$$\forall\, x \in E, \quad (u - u^*)(x) = 2\sin\theta\,(f_1 \wedge x).$$

On voit aussi qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{E}}(u - u^*) = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Enfin, si $f_1 = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$, et si $g \in \mathscr{L}(E)$ est défini par $g(x) = 2\sin\theta\,(f_1 \wedge x)$ pour tout $x \in E$, on trouve

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{E}}(g) = 2\sin\theta \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Compte tenu de (1) et (2), on détermine $\sin\theta$ par identification.

Exercice de cours 36. Montrer que l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$\frac{-1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

représente une rotation de $\mathbb{R}^3$ (muni de son produit scalaire canonique). Déterminer l'angle et l'axe de cette rotation. Pouvait-on deviner l'angle de la rotation (presque) sans calcul ?

Chapitre 3

Dualité et formes quadratiques

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n > 0$.

1. Dualité

1.1. Formes linéaires.

Définition 34 – forme linéaire et dual d'un espace vectoriel

On appelle ***forme linéaire*** sur E toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$. On note $E^* = \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ l'ensemble des formes linéaires sur E. C'est un espace vectoriel de dimension $\dim E \times \dim \mathbb{K} = n \times 1 = n$, appelé le ***dual*** de E.

Exemple 6.

1. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Pour tout $x \in E$, il existe $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ unique tel que $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. Il est alors clair que pour chaque $i \in \{1, \ldots, n\}$, l'application

$$e_i^* \colon \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & x_i \end{array}$$

   est une forme linéaire sur E, appelée ***i-ième coordonnée*** sur la base $\mathscr{B}$.

2. Soient $E = \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices de taille $p \times q$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, et φ l'application trace, c'est-à-dire, l'application de E dans $\mathbb{K}$ qui à A dans E associe $\mathrm{Tr}(A)$. Alors φ est une forme linéaire sur E.
3. Soient $E = \mathbb{K}_d[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus d, et $a \in \mathbb{K}$. Soit φ l'évaluation en a, c'est-à-dire l'application de E dans $\mathbb{K}$ qui à P dans E associe $P(a)$. Alors φ est une forme linéaire sur E.

Exercice de cours 37. Vérifier dans chacun des exemples ci-dessus que l'application en question est en effet une forme linéaire sur E. Déterminer pour chacune d'elles son noyau. Quel est la dimension de ce noyau ?

1.2. Hyperplans.

Définition 35 – hyperplan

On appelle ***hyperplan*** de E tout sous-espace vectoriel de E de codimension 1, autrement dit tout sous-espace vectoriel de E de dimension $n - 1$.

Proposition 36 – caractérisation des hyperplans

Les hyperplans de E sont les noyaux des formes linéaires non nulle sur E.

Exercice de cours 38. Démontrer cette proposition.

1.3. Bases duales.

Proposition-Définition 37 – base duale

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. On considère pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, la forme linéaire $e_i^* \colon E \to \mathbb{K}$ définie par

$$\forall\, j \in \{1, \dots, n\}, \quad e_i^*(e_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ 1 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Alors la famille $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une base de E^*, appelée ***base duale*** de $\mathscr{B}$, et notée $\mathscr{B}^*$.

Exercice de cours 39. Démontrer le théorème.

Exercice de cours 40. Montrer que les vecteurs $v_1 = (2, 1, 4)$, $v_2 = (3, 2, 3)$, $v_3 = (-1, -1, 2)$ de $\mathbb{R}^3$ forment une base de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer la base duale.

Proposition-Définition 38 – base anté-duale

Soit $(\ell_1, \dots, \ell_n)$ une base de E^*. Alors il existe une unique base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de E telle que pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\ell_i(\varepsilon_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ 1 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

La base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est appelée la ***base anté-duale*** de $(\ell_1, \dots, \ell_n)$.

Exercice de cours 41. Démontrer la proposition. (*Indication : on pourra montrer que l'application*

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ x & \longmapsto & (\ell_1(x), \dots, \ell_n(x)) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.)

Exercice de cours 42. On définit trois formes linéaires f_1, f_2, f_3 sur $\mathbb{K}^3$ par : pour tout $v = (x, y, z) \in \mathbb{K}^3$, $f_1(v) = x + y - z$, $f_2(v) = x - y + z$, $f_3(v) = x + y + z$. Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base de $(\mathbb{K}^3)^*$ et trouver sa base anté-duale dans $\mathbb{K}^3$.

Remarque 10. Rappelons que deux espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{K}$ sont isomorphes si et seulement si ils ont la même dimension. Ainsi E et E^* sont-ils isomorphes. Les propositions-définitions 37 et 38 fournissent des isomorphimes explicites. Mais ces isomorphismes ne sont pas canoniques car ils dépendent du choix d'une base de E et E^* respectivement. En revanche, E et $(E^*)^*$ sont canoniquement isomorphes. En effet, l'application linéaire

$$\Phi \colon E \longrightarrow (E^*)^*, \quad x \longmapsto \left(\begin{array}{ccc} E^* & \to & \mathbb{K} \\ \ell & \mapsto & \ell(x) \end{array} \right)$$

est un isomorphisme, qui ne dépend d'aucune base de E ou E^*.

1.4. Transposition. Soient F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $m > 0$, et $f \in \mathscr{L}(E, F)$ un endomorphisme de E dans F.

Définition 39 – transposée d'un endomorphisme

On appelle ***transposée de*** f, et on note ${}^t\!f$, l'application de F^* dans E^* définie par :

$$\forall\, \varphi \in F^*, \qquad {}^t\!f(\varphi) = \varphi \circ f.$$

Proposition 40 – l'application transposée est un endomorphisme

On a : ${}^t f \in \mathscr{L}(F^*, E^*)$. De plus, si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ sont des bases de E et F respectivement, alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}^*,\mathscr{C}^*}({}^t f) = {}^t A \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K}),$$

où $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est la matrice de f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$.

Exercice de cours 43.

1. Démontrer cette proposition.

2. Démontrer les propriétés suivantes :

(i) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall f_1, f_2 \in \mathscr{L}(E,F)$, ${}^t(\lambda f_1 + f_2) = \lambda\, {}^t f_1 + {}^t f_2$.
(ii) $\forall f \in \mathscr{L}(E,F), \forall g \in \mathscr{L}(F,G)$, ${}^t(g \circ f) = {}^t f \circ {}^t g$, où G est $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
(iii) ${}^t(\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Id}_{E^*}$.
(iv) Si f est un isomorphisme de E dans F, alors ${}^t f$ est un isomorphisme de F^* dans E^* et

$$({}^t f)^{-1} = {}^t(f^{-1}).$$

Proposition 41 – l'application $f \mapsto {}^t f$ induit un isomorphisme

L'application $t\colon \mathscr{L}(E,F) \longrightarrow \mathscr{L}(F^*,E^*)$, $f \longmapsto {}^t f$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Exercice de cours 44. Démontrer cette proposition.

Exercice de cours 45. Soient E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_p[X]$, et $f\colon E \to E$, $P \mapsto XP$. Calculer $({}^t f)(\varphi)$, où $\varphi\colon E \to \mathbb{R}$, $P \mapsto P'(0)$.

2. Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques

2.1. Formes bilinéaires symétriques. On rappelle qu'une ***forme bilinéaire symétrique*** sur E est une application $\varphi\colon E \times E \to \mathbb{K}$ telle que $y \mapsto \varphi(x,y)$ est linéaire pour tout $x \in E$ et $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$ pour tous $x, y \in E$ (voir la définition 1 au tout début du cours).

Soient $\mathscr{E}$ une base de E, φ une forme bilinéaire symétrique sur E et $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(\varphi)$, i.e.,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \varphi(e_1,e_1) & \cdots & \varphi(e_1,e_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi(e_n,e_1) & \cdots & \varphi(e_n,e_n). \end{pmatrix}$$

Si $x, y \in E$ ont pour matrices X et Y dans la base $\mathscr{E}$, on a vu que

$$\varphi(x,y) = {}^t XAY = {}^t YAX.$$

Exercice de cours 46. Soient $\mathscr{F}$ une autre base de E et $P = P_{\mathscr{E}}^{\mathscr{F}}$ la matrice de passage de $\mathscr{E}$ à $\mathscr{F}$. Exprimer la matrice B de φ dans la base $\mathscr{F}$ en fonction de A et P.

Dans les chapitres précédents, nous avons essentiellement étudier le cas où φ est un produit scalaire sur E. Nous allons dans ce chapitre considérer d'autres cas.

2.2. Formes quadratiques.

Définition 42 – Formes quadratiques

Une application $Q\colon E \to \mathbb{K}$ est appelée une ***forme quadratique*** (sur E) s'il existe une forme bilinéaire symétrique φ sur E telle que

$$\forall\, x \in E, \quad Q(x) = \varphi(x,x).$$

On note $\mathscr{Q}(E)$ le sous-ensemble de $\mathscr{F}(E, \mathbb{K})$ constitué des formes quadratiques.

Exercice de cours 47. Soient Q une forme quadratique sur E, et φ une forme bilinéaire symétrique sur E telle que $Q(x) = \varphi(x, x)$ pour tout $x \in E$.

1. Montrer pour tous $x, y \in E$, la ***formule de polarisation*** :
$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}(Q(x + y) - Q(x) - Q(y)). \tag{3}$$

2. En déduire qu'il existe une unique forme bilinéaire symétrique φ sur E telle que $Q(x) = \varphi(x, x)$ pour tout $x \in E$, qu'on appelle la ***forme polaire de*** Q.

Exercice de cours 48. Vérifier que $\mathscr{Q}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(E, \mathbb{K})$. Quelle est sa dimension ?

Remarque 11. **1.** Si φ est la forme polaire de Q, on a aussi la formule
$$\varphi(x, y) = \frac{1}{4}(Q(x + y) - Q(x - y)). \tag{4}$$

2. Lorsque φ est un produit scalaire, alors l'application $E \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \sqrt{Q(x)}$ est une norme sur E (voir le Théorème 8).

Exercice de cours 49. Donner des exemples de formes quadratiques qui ne soient pas issues de produits scalaires.

Compte tenu de l'exercice précédent on adopte pour les formes quadratiques la terminologie des formes bilinéaires symétriques. En particulier, on appelle ***matrice de Q dans une base $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E***, la matrice de sa forme polaire φ dans cette base. On la note $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(Q)$. Autrement dit,
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(Q) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \varphi(e_1, e_1) & \cdots & \varphi(e_1, e_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi(e_n, e_1) & \cdots & \varphi(e_n, e_n). \end{pmatrix}$$

2.3. Expression analytique d'une forme quadratique si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

On suppose dans ce paragraphe $\boxed{\mathbb{K} = \mathbb{R}}$, et $\boxed{E = \mathbb{R}^n}$.

Soient Q une forme quadratique, φ sa forme polaire et $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $E = \mathbb{R}^n$. Posons pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $a_{i,j} = \varphi(e_i, e_j)$. Alors pour tous $u = \sum_{i=1}^n x_i e_i = (x_1, \ldots, x_n)$ et $v = \sum_{j=1}^n y_j e_j = (y_1, \ldots, y_n)$ dans E, on a
$$\varphi(u, v) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} x_i y_j$$
et
$$Q((x_1, \ldots, x_n)) = Q(u) = \varphi(u, u) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n}^{n} x_i x_j a_{i,j} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_{i,i} x_i^2}_{\text{termes carrés}} + 2 \underbrace{\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n}^{n} a_{i,j} x_i x_j}_{\text{termes rectangulaires}} .$$

Ainsi, l'application $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto Q((x_1, \ldots, x_n))$ est un polynôme *homogène*, i.e., $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $Q(\lambda u) = \lambda^2 Q(u)$, dont tous les monômes sont des polynômes homogènes de degré 2.

⚠ **Attention** : on note ici $(x_1, \ldots, x_n)$ un élément de $E = \mathbb{R}^n$; cela ne signifie pas que Q est une fonction de n variables, d'où les doubles parenthèses ! Dans la suite, on notera simplement $Q(x_1, \ldots, x_n)$ pour $Q((x_1, \ldots, x_n))$ lorsque $E = \mathbb{R}^n$.

Réciproquement, si Q est un tel polynôme, alors il existe des scalaires $a_{i,j} \in \mathbb{K}$, pour $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, tels que pour tout $x \in E$,
$$Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n}^{n} a_{i,j} x_i x_j,$$
et Q est une forme quadratique dont la forme polaire est donnée par
$$\forall\, u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i,\ \forall\, v = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \in E, \qquad \varphi(u, v) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} x_i y_j.$$

En conclusion, nous avons montré :

Proposition 43 – caractérisation des formes quadratiques sur $\mathbb{R}^n$

Les formes quadratiques sur $\mathbb{R}^n$ sont les applications polynômes dont tous les monômes sont des polynômes homogènes de degré 2.

Exemple 7. Une forme quadratique Q sur $\mathbb{R}^3$ est de la forme

$$Q(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + eyz + fzx,$$

avec $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}$.

⚠ **Attention** : de nouveau, $Q(x,y,z)$ signifie en toute rigueur $Q((x,y,z))$.

La matrice de la forme polaire φ de Q dans la base canonique $\mathscr{E}$ de $\mathbb{R}^3$ est donnée par

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(\varphi) = \begin{pmatrix} a & d/2 & f/2 \\ d/2 & b & e/2 \\ f/2 & e/2 & c \end{pmatrix},$$

et

$$\varphi((x,y,z),(x',y',z')) = axx' + byy' + czz' + \frac{d}{2}(xy' + yx') + \frac{e}{2}(yz' + zy') + \frac{f}{2}(zx' + xz').$$

3. Orthogonalité

Définition 44 – vecteurs φ-orthogonaux

Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur E.

(i) Deux vecteurs x, y de E sont dits ***φ-orthogonaux***, ou ***orthogonaux pour*** φ, si $\varphi(x,y) = 0$.

(ii) Un vecteur x de E est dit ***φ-isotrope*** ou ***isotrope pour*** φ, si $\varphi(x,x) = 0$.

(iii) Des parties F et G de E sont dites ***φ-orthogonales*** ou ***orthogonales pour*** φ, si $\varphi(x,y) = 0$ pour tout $(x,y) \in F \times G$.

Si F est un sous-espace de E, on appelle ***φ-orthogonal*** de F le sous-espace $F^{\perp_\varphi}$ de E constitué des vecteurs $x \in E$ tels que $\varphi(x,y) = 0$ pour tout $y \in F$. Le φ-orthogonal $E^{\perp_\varphi}$ de E est appelé le ***noyau*** de φ, et on le note $\mathrm{Ker}\,\varphi$, i.e.,

$$\mathrm{Ker}\,\varphi = \{x \in E \mid \varphi(x,y) = 0\,,\ \forall\, y \in E\}.$$

Le ***cône isotrope*** $\mathscr{C}_\varphi$ de φ est l'ensemble des vecteurs isotropes de E :

$$\mathscr{C}_\varphi = \{x \in E \mid \varphi(x,x) = 0\}.$$

⚠ **Attention** : on note $\mathrm{Ker}\,\varphi$ bien que φ ne soit pas une application linéaire ; c'est toutefois, comme le noyau d'une application linéaire, un sous-espace vectoriel de E.

⚠ **Attention** : on prendra garde au fait, qu'en général, $\mathscr{C}_\varphi$ n'est <u>pas</u> un sous-espace vectoriel de E.

Remarque 12. Le cône isotrope $\mathscr{C}_\varphi$ d'une forme quadratique est un «cône» au sens où pour tout $\lambda \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$, si $x \in \mathscr{C}_\varphi$, alors $\lambda x \in \mathscr{C}_\varphi$.

Exercice de cours 50.

1. Donner des exemples de formes quadratiques où

a) le cône isotrope est un sous-espace vectoriel de E,

b) le cône isotrope n'est <u>pas</u> un sous-espace vectoriel de E,

c) le cône isotrope est réduit à $\{0_E\}$.

2. Dans le cas général, comparer $\mathscr{C}_\varphi$ et $\mathrm{Ker}\,\varphi$.

Définition 45 – famille φ-orthogonale/φ-orthonormée

Soit φ une forme bilinaire symétrique sur E et $\mathscr{X} = (x_1, \ldots, x_p)$ une famille de vecteurs de E.

(i) On dit que $\mathscr{X}$ est ***φ-orthogonale*** si $\varphi(x_i, x_j) = 0$ pour tous $i, j \in \{1, \ldots, p\}$ et distincts.

(ii) On dit que $\mathscr{X}$ est ***φ-orthonormée*** si elle est φ-orthogonale et si $\varphi(x_i, x_i) = 1$ pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$.

Définition 46 – forme bilinéaire symétrique non dégénérée

On dit qu'une forme bilinéaire symétrique φ sur E est ***dégénérée*** (resp. ***non dégénérée***) si $E^{\perp_\varphi} \neq \{0\}$ (resp. $E^{\perp_\varphi} = \{0\}$).

Soient Q une forme quadratique sur E, et φ sa forme polaire. On rappelle que si $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ sont des bases de E, alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{F}}(Q) = {}^tP\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(Q)\,P,$$

où $P = P_{\mathscr{E}}^{\mathscr{F}}$ est la matrice de passage de la base $\mathscr{E}$ à la base $\mathscr{F}$.

⚠ **Attention** : pour une application linéaire f, la formule de changement base est

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{F}}(f) = P^{-1}\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(f)\,P.$$

Définition 47 – matrices congruentes

On dit que deux matrices $A, A' \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont ***congruentes*** s'il existe une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A' = {}^tPAP$.

Ainsi, deux matrices <u>symétriques</u> A et A' sont congruentes si et seulement si elles représentent la même forme quadratique dans des bases différentes.

Définition 48 – formes quadratiques congruentes

On dit que deux formes quadratiques Q et Q' sur E sont ***congruentes*** si leur matrice <u>dans une même base</u> sont congruentes.

Remarque 13. Si $A, A' \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont congruentes alors $\det(A') = (\det P)^2 \det(A)$ pour une certaine matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{K})$. Si Q est une forme quadratique sur E, le signe de $\det \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(Q)$ ne dépend donc pas de la base $\mathscr{E}$ choisie.

4. Bases orthogonales

Soit Q une forme quadratique sur E de forme polaire φ.

Question. Existe-t-il des bases φ-orthogonales de E ? Autrement dit, existe-t-il une base $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(Q) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$? Si oui, comment construire en pratique de telles bases ?

On admet le théorème suivant (on le démontrera dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) :

Théorème-Définition 49 – existence de bases φ-orthogonales

Soient φ une forme bilinéaire symétrique sur E et Q la forme quadratique associée. On suppose que Q est non nulle. Alors E possède des bases φ-orthogonales. Précisément, il existe une base $(\ell_1, \ldots, \ell_n)$ de E^* et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ell_i^2\,,$$

et la base duale de $(\ell_1, \ldots, \ell_n)$ est une base φ-orthogonale. De manière équivalente, il existe p formes linéaires indépendantes $\ell_1, \ldots, \ell_p$ sur E, avec $1 \leqslant p \leqslant n$, et p scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ non nuls tels que

$$Q = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \ell_i^2.$$

On admet que l'entier p ne dépend pas de la famille $(\ell_1, \ldots, \ell_p)$ choisie vérifiant les conditions ci-dessus ; on l'appelle le ***rang*** de Q (ou de φ). Par convention, le rang de la forme quadratique nulle est 0.

Exercice de cours 51. Justifier que les deux dernières assertions du théorème sont équivalentes à la première.

Remarque 14. **1.** Dans les notations du théorème, on a pour tous $x, y \in E : \varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ell_i(x) \ell_i(y)$.

2. Le rang de Q (ou de φ) coïncide avec le rang de la matrice de φ dans n'importe quelle base de E.

Comme conséquence du Théorème-définition 49 on obtient le théorème suivant de classification pour les formes quadratiques complexes.

Théorème 50 – classification des formes quadratiques complexes

Pour que deux formes quadratiques sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie soient congruentes il faut et il suffit qu'elles aient le même rang.

5. Formes quadratiques réelles

Dans tout cette section, $\boxed{\mathbb{K} = \mathbb{R}}$.

5.1. Loi d'inertie de Sylvester.

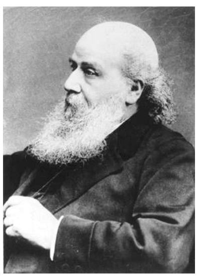
Définition 51 – forme quadratique (définie) positive

Soient φ une forme bilinéaire symétrique, et Q la forme quadratique associée à φ.

(i) On dit que Q (ou φ) est ***positive*** (resp. ***négative***) si $Q(x) \geqslant 0$ (resp. $Q(x) \leqslant 0$) pour tout vecteur x de E.

(ii) On dit que Q (ou φ) est ***définie positive*** (resp. ***définie négative***) si $Q(x) > 0$ (resp. $Q(x) < 0$) pour tout vecteur *non nul* x de E.

***James Joseph Sylvester**, né le 3 septembre 1814 et mort le 13 mars 1897 à Londres, est un mathématicien et géomètre anglais.*



Théorème-Définition 52 – loi d'inertie de Sylvester

Soient φ une forme bilinéaire symétrique non nulle sur E et Q la forme quadratique associée.

(i) Il existe des entiers s et t, avec $1 \leqslant s+t \leqslant n$ et une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que :

$$Q(x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i) = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i^2 - \sum_{i=s+1}^{t} \lambda_i^2.$$

(ii) On a $s+t = \operatorname{rang}(\varphi)$ et les entiers s et t sont définis comme suit : s (resp. t) est le maximum des dimensions des sous-espaces F de E tels que $\varphi|_{F\times F}$ soit définie positive (resp. définie négative).

On dit que le couple (s,t) est la ***signature*** de φ.

Exercice de cours 52. Démontrer l'assertion (i) de ce théorème à l'aide du théorème-définition 49. On admettra l'assertion (ii).

Comme conséquence du théorème-définition 52 on obtient le théorème suivant de classification pour les formes quadratiques réelles :

Théorème 53 – Classification des formes quadratiques réelles

Pour que deux formes quadratiques sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie soient congruentes il faut et il suffit qu'elles aient la même signature.

Le théorème suivant fait le lien avec le chapitre précédent. Il est parfois appelé le théorème de *diagonalisation simultanée* :

Théorème 54 – diagonalisation simultanée

Soient E un espace euclidien de dimension finie non nulle et φ une forme bilinéaire symétrique (réelle). Il existe une base de E à la fois orthonormée et φ-orthogonale.

Exercice de cours 53. Démontrer ce théorème à l'aide du Théorème fondamental.

5.2. Orthogonalisation effective. Il faut retenir la démonstration du résultat suivant qui est connue sous le nom de ***procédé d'orthogonalisation de Gauss***.

Théorème 55 – procédé d'orthogonalisation de Gauss

Soit Q une forme quadratique sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie $n > 0$. Il existe une décomposition de Q en combinaison linéaire, à coefficients éventuellement nuls, de carrés de $n = \dim E$ formes linéaires indépendantes.

Johann Carl Friedrich Gauss*, né le 30 avril 1777 à Brunswick et mort le 23 février 1855 à Göttingen, est un mathématicien, astronome et physicien allemand. Doté d'un grand génie, il a apporté de très importantes contributions à ces trois sciences. Surnommé «le prince des mathématiciens», il est considéré comme l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps.*

Il ne s'agit que d'une reformulation du théorème 49 mais nous allons ici en donner une démonstration en construisant de manière explicite ces formes linéaires indépendantes. Cela nous permettra en particulier de déterminer en pratique la signature d'une forme quadratique.

Démonstration. Soit φ la forme polaire de Q. On raisonne par récurrence sur la dimension n de E, le cas où $n = 1$ étant clair. Soient $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, et $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(\varphi)$.

Pour $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$, il vient :

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}\lambda_i^2 + 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{i,j}\lambda_i\lambda_j.$$

• Supposons qu'il existe un indice i tel que $a_{i,i} \neq 0$. Par exemple, $a_{1,1} \neq 0$. Posons

$$f_1(x) = a_{1,1}\lambda_1 + \sum_{j=2}^{n} a_{1,j}\lambda_j.$$

Alors :

$$Q(x) = \frac{1}{a_{1,1}}(f_1(x))^2 + R(\sum_{i=2}^{n} \lambda_i e_i),$$

où R est une forme quadratique sur $F = \mathbb{R}e_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}e_n$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe des formes linéaires indépendantes $g_2, \ldots, g_n$ sur F et des scalaires $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tels que :

$$R = \alpha_2 g_2^2 + \cdots + \alpha_n g_n^2.$$

Prolongeons g_i, $i = 2, \ldots, n$, en un élément $f_i \in E^*$, en posant :

$$f_i(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n) = g_i(\lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n).$$

Il est immédiat que $f_1, \ldots, f_n$ sont indépendants. Posant $\alpha_1 = a_{1,1}^{-1}$, il vient :

$$Q = \alpha_1 f_1^2 + \cdots + \alpha_n f_n^2.$$

• On suppose $a_{i,i} = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Le résultat étant clair pour $Q = 0$, nous supposerons, par exemple, $a_{1,2} \neq 0$. On a cette fois :

$$Q(x) = 2(a_{1,2}\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1 \sum_{i=3}^{n} a_{1,i}\lambda_i + \lambda_2 \sum_{j=3}^{n} a_{2,j}\lambda_j + \sum_{3\leqslant i<j\leqslant n} a_{i,j}\lambda_i\lambda_j).$$

Posons :

$$h_1(x) = \lambda_1 + \frac{1}{a_{1,2}} \sum_{i=3}^{n} a_{2,i}\lambda_i \ , \ h_2(x) = \lambda_2 + \frac{1}{a_{1,2}} \sum_{i=3}^{n} a_{1i}\lambda_i.$$

Alors :

$$Q(x) = 2a_{1,2}h_1(x)h_2(x) + R(\lambda_3 e_3 + \cdots + \lambda_n e_n),$$

où R est une forme quadratique sur $F = \mathbb{R}e_3 \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}e_n$. En remarquant que $4h_1h_2 = (h_1 + h_2)^2 - (h_1 - h_2)^2$, et en posant $f_1 = h_1 + h_2$, $f_2 = h_1 - h_2$, on obtient

$$Q = a_{1,2}\left(\frac{f_1^2 - f_2^2}{2}\right) + R(\lambda_3 e_3 + \cdots + \lambda_n e_n),$$

et on termine alors comme dans le cas précédent en utilisant l'hypothèse de récurrence.

Exemple 8. Considérons la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ donnée par :

$$Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx.$$

Appliquant la méthode de Gauss, il vient :

$$Q(x, y, z) = (x - y - z)^2 - 4yz = (x - y - z)^2 + (y - z)^2 - (y + z)^2.$$

On en déduit que la forme est de rang 3, de signature $(2,1)$, et qu'il existe une base $\mathscr{F}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{F}}(Q) = \mathrm{diag}(1,1,-1).$$

Chapitre 4

Espaces hermitiens

Dans ce chapitre, les espaces vectoriels considérés sont, sauf mention du contraire, des espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$. Ce chapitre est important, par exemple, dans l'étude des séries de Fourier.

1. Formes sesquilinéaires

Définition 56 – formes sesquilinéaires et semi-linéaires

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $f\colon E \times E \to \mathbb{C}$. On dit que f est une ***forme sesquilinéaire*** sur E si f vérifie les propriétés suivantes :

(i) Pour tout $a \in E$, l'application $E \to \mathbb{C}$, $y \to f(a, y)$ est linéaire, i.e.,

$$\forall\,(u, v) \in E \times E,\ \forall\,\lambda \in \mathbb{C},\quad f(a, u + \lambda v) = f(a, u) + \lambda f(a, v).$$

En d'autres termes, pour tout $a \in E$, l'application $y \to f(a, y)$ est une forme linéaire sur E.

(ii) Pour tout $b \in E$, l'application $E \to \mathbb{C}$, $x \to f(x, b)$ est ***semi-linéaire***, i.e.,

$$\forall\,(x, y) \in E \times E,\ \forall\,\alpha \in \mathbb{C},\quad f(x + \alpha y, b) = f(x, b) + \overline{\alpha} f(y, b).$$

Soit f une application de $E \times E$ dans $\mathbb{C}$. Compte tenu des définitions, dire que f est sesquilinéaire signifie que pour tous $\alpha, \beta, \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ et tous $x, y, u, v \in E$,

$$f(\alpha x + \beta y, \lambda u + \mu v) = \overline{\alpha}\lambda f(x, u) + \overline{\alpha}\mu f(x, v) + \overline{\beta}\lambda f(y, u) + \overline{\beta}\mu f(y, v).$$

⚠ **Attention** : si f est sesquilinéaire, l'application $x \to f(x, b)$ n'est pas une forme linéaire en général ; elle l'est seulement si l'application $x \to f(x, b)$ est nulle.

Exemple 9.

1. Soient φ et ψ des formes linéaires sur E. L'application

$$E \times E \to \mathbb{C}\ ,\ (x, y) \to \overline{\varphi(x)}\psi(y)$$

est une forme sesquilinéaire sur E.

2. Soit E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{C}$. L'application

$$E \times E \to \mathbb{C}\ ,\ (f, g) \to \int_0^1 \overline{f(t)}g(t)\,dt$$

est une forme sesquilinéaire sur E.

3. Supposons E de dimension finie n, et soit $\mathscr{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soit $p \in \{1, 2, \dots, n\}$. Si $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$ et $y = \mu_1 e_1 + \cdots + \mu_n e_n$ sont des vecteurs de E, posons :

$$f(x, y) = \overline{\lambda_1}\mu_1 + \cdots + \overline{\lambda_p}\mu_p.$$

On obtient ainsi une forme sesquilinéaire sur E.

Exercice de cours 54. Vérifier dans chacun des exemples précédents que f est en effet une forme sesquilinéaire sur E.

Supposons E de dimension finie $n > 0$. Soient $\mathscr{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et f une forme sesquilinéaire. Pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$, posons $a_{ij} = f(e_i, e_j)$, et soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On dit que A est la ***matrice de f dans la base $\mathscr{E}$***, et on écrit $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(f)$.

Soient $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$ et $y = \mu_1 e_1 + \cdots + \mu_n e_n$ des vecteurs de E. Notons X et Y les matrices de x et y dans la base $\mathscr{E}$.

Exercice de cours 55. Écrire $f(x, y)$ en fonction des matrices A, X et Y.

2. Produit scalaire hermitien

Définition 57

Soient E un espace vectoriel et f une forme sesquilinéaire sur E. On dit que f est ***hermitienne*** si pour tous $x, y \in E$,
$$f(y,x) = \overline{f(x,y)}.$$

Charles Hermite *(24 décembre 1822 à Dieuze – 14 janvier 1901 à Paris) est un mathématicien français. Ses travaux concernent surtout la théorie des nombres, les formes quadratiques, les polynômes orthogonaux, les fonctions elliptiques et les équations différentielles. Plusieurs entités mathématiques sont qualifiées d'hermitiennes en son honneur. Il est aussi connu comme l'un des premiers à utiliser les matrices.*

Pour tout $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on note A^* la matrice ${}^t\bar{A}$, i.e.,
$$A^* = {}^t\bar{A} = \begin{pmatrix} \overline{a_{1,1}} & \cdots & \overline{a_{n,1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{a_{1,n}} & \cdots & \overline{a_{n,n}} \end{pmatrix}.$$
La notation sera justifiée dans la suite du chapitre.

Exercice de cours 56. Soient E un espace vectoriel et f une forme sesquilinéaire sur E.

1. Montrer que f est hermitienne si et seulement si $A = A^*$.

On dit qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est ***hermitienne*** si $A = A^*$. On note $\mathscr{H}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices hermitiennes d'ordre n.

2. Vérifier que $\mathscr{H}_n(\mathbb{C})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n^2. Est-il un $\mathbb{C}$-espace vectoriel ?

Remarque 15. Si f est une forme sesquilinéaire hermitienne sur l'espace E, alors $f(x,x) \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in E$ (à justifier).

La remarque justifie la définition suivante :

Définition 58

Soient E un espace vectoriel et f une forme sesquilinéaire hermitienne sur E.

(i) On dit que f est ***positive*** (resp. ***négative***) si $f(x,x) \geqslant 0$ (resp. $f(x,x) \leqslant 0$) pour tout $x \in E$.

(ii) On dit que f est ***définie positive*** (resp. ***définie négative***) si elle est positive (resp. négative) et si $f(x,x) = 0$ si et seulement si x est nul.

Exercice de cours 57. Reprendre les exemples de l'exercice 50. Parmi eux, quels sont ceux pour lesquels f est positive ? définie positive ?

Définition 59

On appelle ***produit scalaire (hermitien)*** sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E toute forme sesquilinéaire hermitienne définie positive. Un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire hermitien est appelé un ***espace (vectoriel) hermitien***.

3. Premières propriétés

Dans la suite de ce chapitre, E est un espace vectoriel hermitien. Si x, y sont des vecteurs de E, on note $(x \,|\, y)$ le produit scalaire de x et de y (dans cet ordre). L'application

$$E \times E \to \mathbb{C}\ ,\ (x, y) \to (x|y)$$

est donc une forme sesquilinéaire hermitienne et définie positive sur E. On a $(x \,|\, x) \in \mathbb{R}_+$ pour tout $x \in E$. On peut donc considérer :

$$\|x\| = \sqrt{(x \,|\, x)}.$$

La proposition suivante est l'analogue de la proposition 6 :

Proposition 60 – propriétés du produit scalaire

Soient $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors :

(i) $\|\lambda x\| = |\lambda|\, \|x\|$ (homogénéité),
(ii) $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(x \,|\, y) + \|y\|^2$,
(iii) $|(x \,|\, y)| \leqslant \|x\|.\|y\|$ (inégalité de Cauchy-Schwarz),
(iv) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire),
(v) $|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x - y\|$,
(vi) $2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2$ (identité de la médiane).

⚠ **Attention** : ici, $|\cdot|$ désigne le module. D'autre part, on notera dans (ii) que le terme le terme «$2(x \,|\, y)$» est remplacé ici par «$2\,\mathrm{Re}\,(x \,|\, y)$».

On dit que $x \in E$ est ***unitaire*** si $\|x\| = 1$.

On définit exactement comme dans le cas euclidien la notion de ***vecteurs orthogonaux***, d'***orthogonal d'une partie***, de ***familles orthogonales/orthonormales***, etc., et le Théorème de Pythagore (cf. Théorème 12) reste valable pour les espaces hermitiens.

Le théorème suivant se démontre comme le Théorème 13, à l'aide du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt :

Théorème 61 – procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soient E un espace vectoriel hermitien de dimension finie $n > 0$ et $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Il existe une base $\mathscr{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ de E possédant les propriétés suivantes :

(i) $\mathscr{F}$ est une famille orthonormée ;
(ii) pour $1 \leqslant j \leqslant n$, on a $\mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_j) = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_j)$.

Corollaire 62

Si E est un espace hermitien de dimension finie non nulle, il possède des bases orthonormées.

Supposons E de dimension finie $n > 0$, et soit $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E.
Soient $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$ et $y = \mu_1 e_1 + \cdots + \mu_n e_n$ des vecteurs de E. Notons X et Y les matrices de x et y dans la base $\mathscr{E}$. On a vu que

$$(x \,|\, y) = \sum_{i,j=1}^{n} \overline{\lambda_i} \mu_j (e_i|e_j).$$

La base $\mathscr{E}$ étant orthonormée, il vient donc :

$$(x \,|\, y) = \overline{\lambda_1}\mu_1 + \cdots + \overline{\lambda_n}\mu_n = X^*Y = \overline{Y^*X}.$$

Exercice de cours 58. Justifier ces assertions.

Comme pour les espaces euclidiens, on peut énoncer le théorème «de la base orthonormée incomplète» :

Théorème 63

Soit E un espace hermitien de dimension finie non nulle n.

(i) Soit $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_p)$, avec $1 \leqslant p < n$, une famille orthonormée de vecteurs de E. Il existe $e_{p+1}, \ldots, e_n \in E$ tels que $(e_1, \ldots, e_n)$ soit une base orthonormée de E.

(ii) Soit F un sous-espace vectoriel de E. On a :

$$E = F \oplus F^\perp.$$

En particulier :

$$\dim F^\perp = \dim E - \dim F.$$

4. Adjoint d'un endomorphisme

Dans tout cette section, E est un espace vectoriel hermitien de dimension finie $n > 0$.

Théorème-Définition 64 – adjoint d'un endomorphisme

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Il existe un et un seul endomorphisme de E, noté u^*, et appelé l'***adjoint*** de u, tel que pour tous $x, y \in E$,

$$(u(x) \,|\, y) = (x \,|\, u^*(y)).$$

Si $\mathscr{E}$ est une base orthonormée de E, on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(u^*) = (\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(u))^*.$$

La dernière assertion justifie, pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, la notation $A^* = {}^t\bar{A}$.

Exercice de cours 59. Démontrer ce théorème.

Proposition 65

Soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Alors :

(i) $(\lambda u + \mu v)^* = \overline{\lambda} u^* + \overline{\mu} v^*$,

(ii) $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$,

(iii) $(u^*)^* = u$,

(iv) on a $(\mathrm{Id}_E)^* = \mathrm{Id}_E$ et, si $u \in GL(E)$, alors $u^* \in GL(E)$ et $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$.

Exercice de cours 60.

1. Démontrer la proposition.

2. Soient $u \in \mathscr{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Montrer que $F^\perp$ est stable par u^*.

5. Endomorphismes unitaires

Dans cette section, n est un entier strictement positif. On suppose que $\mathbb{C}^n$ (ou $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$) est muni de son produit scalaire ***canonique***, c'est-à-dire que

$$(x \,|\, y) = \overline{x_1} y_1 + \cdots + \overline{x_n} y_n$$

pour $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$.

Définition 66

Une matrice $\Omega \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est dite ***unitaire*** si elle est inversible et si $\Omega^{-1} = \Omega^*$, autrement dit, $\Omega\Omega^* = \Omega^*\Omega = I_n$.

Exercice de cours 61.

1. Montrer que l'ensemble des matrices unitaires de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est un sous-groupe du groupe $GL_n(\mathbb{C})$. On le note $U(n)$, et on dit que c'est le ***groupe unitaire de degré*** n.

Si $\Omega \in U(n)$, de $\Omega^{-1} = \Omega^*$, on déduit $|\det \Omega|^2 = 1$, donc $\det \Omega \in \mathbb{U}$, où $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ est l'ensemble des complexes de module 1. On pose :

$$SU(n) = \{\Omega \in U(n) \mid \det \Omega = 1\}.$$

2. Montrer que l'ensemble $SU(n)$ est un sous-groupe de $U(n)$, appelé le ***groupe spécial unitaire de degré*** n.

Théorème-Définition 67 – différentes caractérisations des endomorphismes unitaires

Soient E un espace hermitien de dimension finie $n > 0$ et $u \in \mathscr{L}(E)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\|u(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in E$,
(ii) $(u(x) \mid u(y)) = (x|y)$ pour tous $x, y \in E$,
(iii) $u \in GL(E)$ et $u^* = u^{-1}$,
(iv) il existe une base orthonormée $\mathscr{E}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(u) \in U(n)$,
(v) pour toute base orthonormée $\mathscr{E}$ de E, on a $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(u) \in U(n)$,
(vi) il existe une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ soit une base orthonormée de E,
(vii) pour toute base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de E, $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est une base orthonormée de E.

Si ces conditions sont vérifiées, on dit que u est un endomorphisme ***unitaire*** de E.

Les endomorphismes unitaires sont ainsi les analogues des endormorphismes orthogonaux pour les espaces hermitiens.

Corollaire 68 – caractérisation des matrices unitaires

Si $\Omega \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Ω est une matrice unitaire,
(ii) il existe des bases orthonormées $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ de E telles que Ω soit la matrice de passage de la base $\mathscr{E}$ à la base $\mathscr{F}$.

On note $U(E)$ l'ensemble des endomorphismes unitaires de E. C'est un sous-groupe de $GL(E)$. On dit que c'est le ***groupe unitaire*** de E.

Si $u \in U(E)$, on a $\det u \in \mathbb{U}$. On pose :

$$SU(E) = \{u \in U(E) \mid \det u = 1\}.$$

C'est un sous-groupe de $U(E)$, appelé le ***groupe spécial unitaire*** de E.

La proposition suivante justifie le terme «unitaire» pour les endomorphismes unitaires :

Proposition 69 – propriétés des endomorphismes unitaires

Soit u un endomorphisme unitaire de E.

(i) Si F est un sous-espace de E stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u.
(ii) Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de u, alors $\lambda \in \mathbb{U}$.

Exercice de cours 62. Démontrer cette proposition.

Le théorème suivant diffère très fondamentalement du cas euclidien :

Théorème 70 – diagonalisation en bases orthonormées des endomorphismes unitaires

Soient E un espace vectoriel hermitien de dimension finie et $u \in U(E)$. Il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres pour u, et les valeurs propres de u sont de module 1.

⚠ **Attention** : dans le cas euclidien, un endormorphisme orthogonal n'est pas diagonalisable en général : penser aux rotations en dimension 2 qui ne sont que très rarement diagonalisables ! En effet, la matrice

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\theta = 0 \mod \pi$.

6. Endomorphismes hermitiens

Dans toute la suite, E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel hermitien de dimension finie n non nulle.

Définition 71

Un endomorphisme u de E est dit ***auto-adjoint*** ou ***hermitien*** s'il vérifie $u = u^*$.

On note $\mathscr{H}(E)$ l'ensemble des endomorphismes hermitiens de E ; c'est un $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ et $\dim_{\mathbb{R}} \mathscr{H}(E) = n^2$.

Théorème 72

Soient E un espace hermitien de dimension finie n non nulle et $u \in \mathscr{L}(E)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $u \in \mathscr{H}(E)$,
(ii) il existe une base orthonormée $\mathscr{E}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(u) \in \mathscr{H}_n(\mathbb{C})$,
(iii) pour toute base orthonormée $\mathscr{E}$ de E, on a $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(u) \in \mathscr{H}_n(\mathbb{C})$,
(iv) on a $(u(x) \,|\, x) \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in E$,
(v) il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres pour u, et les valeurs propres de u sont réelles.

Remarque 16. **1.** Tout comme le théorème fondamental dans le cas euclidien (cf. Théorème 23), le théorème précédent est fondamental ; en particulier, il faut systématiquement penser à appliquer l'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (v) quand on étudie un problème concernant les endomorphismes hermitiens. La démonstration est cependant nettement plus simple dans le cas complexe grâce au théorème de d'Alembert-Gauss (cf. exercice ci-dessous). Nous réservons donc l'appellation «Théorème fondamental» pour le cas réel.

2. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Le fait que E possède une base orthonormée formée de vecteurs propres pour u n'implique pas que u soit hermitien.

Exercice de cours 63. Démontrer ce théorème.

Exercice de cours 64.

1. Soit $u \in \mathscr{H}(E)$. Montrer

$$E = \mathrm{Ker}\, u \oplus \mathrm{Im}\, u \ , \ \mathrm{Im}\, u = (\mathrm{Ker}\, u)^{\perp}.$$

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $A \in \mathscr{H}_n(\mathbb{C})$ si et seulement si il existe $U \in U(n)$ telle que U^*AU soit diagonale à coefficients réels.

7. Endomorphismes hermitiens positifs

Soit E un espace hermitien. D'après le théorème précédent, les notations suivantes sont légitimes :

$$\begin{array}{lcl} \mathscr{H}^+(E) & = & \{u \in \mathscr{H}(E) \mid \mathrm{Spec}(u) \subset \mathbb{R}_+\}, \\ \mathscr{H}^-(E) & = & \{u \in \mathscr{H}(E) \mid \mathrm{Spec}(u) \subset \mathbb{R}_-\}, \\ \mathscr{H}^{++}(E) & = & \{u \in \mathscr{H}(E) \mid \mathrm{Spec}(u) \subset \mathbb{R}_+^*\}, \\ \mathscr{H}^{--}(E) & = & \{u \in \mathscr{H}(E) \mid \mathrm{Spec}(u) \subset \mathbb{R}_-^*\}. \end{array}$$

Un élément de $\mathscr{H}^+(E)$ (resp. $\mathscr{H}^-(E)$) est dit ***hermitien positif*** (resp. ***hermitien négatif***), et un élément de $\mathscr{H}^{++}(E)$ (resp. $\mathscr{H}^{--}(E)$) est dit ***hermitien défini positif*** (resp. ***hermitien défini négatif***).

On adopte des notations et une terminologie analogue pour les matrices. Ainsi, $A \in \mathscr{H}_n(\mathbb{C})$ est dite ***hermitienne positive*** si $\mathrm{Spec}(A) \subset \mathbb{R}_+$.

Proposition 73

Soient E un espace hermitien de dimension finie $n > 0$ et $u \in \mathscr{L}(E)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $u \in \mathscr{H}^+(E)$,
(ii) $(u(x) \,|\, x) \in \mathbb{R}_+$ pour tout $x \in E$,
(iii) il existe $v \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u = v \circ v^*$,
(iv) il existe $w \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u = w^* \circ w$.

Exercice de cours 65. Démontrer cette proposition.

— fin du cours —