M41 – Examen du jeudi 17 mai 2018

Durée : 3h00.
La précision des arguments utilisés et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie.
Merci de bien vouloir encadrer *les résultats obtenus, et de ne pas écrire au crayon à papier.*

Exercice 1 (questions de cours)**.**

(1) (Lemme d'Abel) Soient $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière et $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $(a_n\rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée. Montrer que pour tout z de $\mathbb{C}$ tel que $|z| < \rho$, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est absolument convergente.

(2) Soiet $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $f \in E$, posons :

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t, \qquad \|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

Les applications $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty \colon E \to \mathbb{R}_+$ sont des normes sur E (*on ne demande pas de justifier ce résultat*).

(a) Montrer que pour tout $f \in E$, on a : $\|f\|_1 \leqslant \|f\|_\infty$.

(b) Montrer que les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

Indication : considérer pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'application $f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} n(1-nx) & \textit{si } x \in [0,\frac{1}{n}], \\ 0 & \textit{sinon.}\end{cases}$

Exercice 2 (Étude de la régularité d'une série entière)**.** Pour tout réel x, on pose

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}.$$

(1) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$.

(2) Étudier la convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ en R et en $-R$. En déduire le domaine de définition de la fonction f.

(3) Étudier la continuité de f sur son domaine de définition.

(4) Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R,R[$.

(5) On cherche désormais à étudier l'allure de la courbe représentative de f sur son domaine de définition.

(a) Quel est le signe de $f'(x)$ pour $x \in [0,R[\cap\mathbb{R}_+$?

(b) Montrer : $\lim\limits_{\substack{x\to R\\ x<R}} f(x) = +\infty$.

(c) Exprimer $(1-x)f'(x)$ sous forme d'une série entière. En déduire le signe de $f'(x)$ sur $]-R,0]$ (*on pourra écrire x sous la forme $x = -t$, avec $t \in [0,R[$ et reconnaître une série alternée*).

(d) Donner l'allure de la courbe représentative de f sur son domaine de définition.

Exercice 3 (Étude d'une équation différentielle)**.** On considère l'équation différentielle

$$(E): \quad y'' + xy' + y = 1.$$

On admet que l'équation différentielle (E) *admet une unique solution vérifiant* $y(0) = y'(0) = 0$*. Le but de cet exercice est de déterminer cette unique solution, et de montrer que celle-ci est développable en série entière.*

(1) Supposons qu'il existe une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ de rayon de convergence strictement positif dont la somme $f :]-R, R[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est solution de l'équation différentielle (E) et vérifie $f(0) = f'(0) = 0$.

(a) Montrer que la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie une relation de récurrence que l'on précisera.

(b) Calculer explicitement a_n pour tout $n \geqslant 0$. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ obtenue ?

(c) Exprimer la série entière obtenue $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ à l'aide de fonctions usuelles.
(*Indication : se rapprocher du développement en série entière de la fonction exponentielle.*)

(2) Conclure en donnant l'unique solution de l'équation différentielle (E) vérifiant $y(0) = y'(0) = 0$. Justifier que cette solution est développable en série entière.

Exercice 4 (Exponentielle de matrice et système différentiel)**.** Posons

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Calculer e^{tB} pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(2) Remarquer que $A = 2I_2 + B$ puis montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a : $e^{tB} = e^{2t}e^{tA}$. En déduire e^{tA} pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(3) Résoudre le système différentiel autonome suivant, d'inconnue (x, y) :

$$\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = x + 2y, \end{cases}$$

et tracer dans le repère $(O; (1,0), (0,1))$ l'allure de la trajectoire de la solution du sytème qui vaut $(1,0)$ en $t = 0$.

(4) Résoudre le système différentiel suivant d'inconnue (x, y) :

$$\begin{cases} x' = 2x - y + 1 \\ y' = x + 2y. \end{cases}$$