Université de Lille | Année 2017-2018
Licence Mathématiques 2ème année | Semestre 4

M41 – Un corrigé de l'examen du jeudi 17 mai 2018

Exercice 1 (questions de cours)**.**

(1) *(Lemme d'Abel) Soient* $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ *une série entière et* $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que* $(a_n \rho^n)_{n \in \mathbb{N}}$ *soit bornée. Montrer que pour tout* z *de* $\mathbb{C}$ *tel que* $|z| < \rho$*, la série* $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ *est absolument convergente.*

Correction. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \rho$. On a : $|a_n z^n| \leqslant |a_n||z|^n = |a_n \rho^n| \left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n$. Par hypothèse, la suite $(a_n \rho^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Il existe donc $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n \rho^n| \leqslant M$, d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant |a_n z^n| \leqslant M \left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n.$$

Or $\left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n$ est le terme général d'une série géométrique convergente car $\frac{|z|}{\rho} < 1$. On en déduit que la série de terme général $|a_n z^n|$ est convergente.

Conclusion : $\boxed{\text{la série } \sum_{n \geqslant 0} a_n z^n \text{ est absolument convergente.}}$

(2) *Soient* $E = \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$ *le* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel des applications continues de* $[0,1]$ *dans* $\mathbb{R}$*. Pour tout* $f \in E$*, posons :*

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt, \qquad \|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|.$$

Les applications $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty \colon E \to \mathbb{R}_+$ *sont des normes sur* E *(*on ne demande pas de justifier ce résultat*).*

(a) *Montrer que pour tout* $f \in E$*, on a :* $\|f\|_1 \leqslant \|f\|_\infty$.

Correction. Soit $f \in E$. Pour tout $t \in [0,1]$, on a $|f(t)| \leqslant \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$, d'o`u

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt \leqslant \int_0^1 \|f\|_\infty dt = \|f\|_\infty.$$

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } f \in E, \|f\|_1 \leqslant \|f\|_\infty.}$

(b) *Montrer que les normes* $\|\cdot\|_1$ *et* $\|\cdot\|_\infty$ *ne sont pas équivalentes.*
Indication : considérer pour $n \in \mathbb{N}^*$*, l'application* $f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} n(1-nx) & \textit{si } x \in [0, \frac{1}{n}], \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$

Correction. Supposons par l'absurde que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ soient équivalentes. Comme on sait déjà que pour tout $f \in E$, $\|f\|_1 \leqslant \|f\|_\infty$ d'après la question (2), il existe alors $\alpha > 0$ tel que pour tout $f \in E$,

$$\|f\|_\infty \leqslant \alpha \|f\|_1.$$

Considérons pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'application $f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} n(1-nx) & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|f_n\|_1 = \frac{1}{2} \times n \times \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$ et $\|f_n\|_\infty = n$, d'où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$n \leqslant \alpha \times \frac{1}{2},$$

ce qui est absurde dès que n est strictement plus grand que $\frac{\alpha}{2}$. On a donc obtenu une contradiction.

Conclusion : $\boxed{\text{les normes } \|\cdot\|_1 \text{ et } \|\cdot\|_\infty \text{ ne sont pas équivalentes.}}$

Exercice 2 (Étude de la régularité d'une série entière)**.** *Pour tout réel x, on pose quand cette expression a un sens,*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}.$$

(1) *Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$.*

Correction. Appliquons par exemple la règle de d'Alembert. On a

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \sqrt{\frac{n}{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}.$$

Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1$. D'après la règle de d'Alembert pour les séries entières, le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ est $R = 1$

Conclusion : $\boxed{R = 1.}$

(2) *Étudier la convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ en R et en $-R$. En déduire le domaine de définition de la fonction f.*

Correction. Rappelons que $R = 1$ d'après la question (1). La série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge car $\frac{1}{2} < 1$.

La $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est une série alternée. En effet, la suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive, décroissante et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ est donc convergente.

Conclusion : $\boxed{\text{la série entière } \sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{\sqrt{n}} \text{ converge en } -1 \text{ et diverge en } 1.}$

D'après la question (1) et ce qui précède, $\boxed{\text{le domaine de définition de } f \text{ est donc } [-1, 1[.}$

(3) *Étudier la continuité de f sur son domaine de définition.*

Correction. Comme f est la somme d'une série entière de rayon de convergence $R = 1$, on sait d'après le cours que f est continue sur $]-1, 1[$.

Étudions la continuité de f en -1.

Première méthode : on sait d'après la question (2) que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ en converge en -1. Le théorème d'Abel tangentiel assure alors que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1}\left(x\mapsto \frac{x^n}{\sqrt{n}}\right)$ converge uniformément sur $[-1,0]$. En particulier, f est continue en -1.

Deuxième méthode. Pour tout $x\in[-1,0[$, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ est une série alternée. En effet, en écrivant $x\in[-1,0[$, $x=-t$, avec $t\in]0,1]$, on remarque que la suite $\left(\frac{t^n}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est postive, décroissante et tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Notons R_n le reste de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1}(x\mapsto \frac{x^n}{\sqrt{n}})$. On a alors d'après les propriétés des séries alternées pour tout $x\in[-1,0[$,

$$|R_n(x)|\leqslant\left|\frac{x^{n+1}}{\sqrt{n+1}}\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Or le terme $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ est indépendant de x et tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, d'où

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{x\in[-1,0[}|R_n(x)|\right)=0,$$

et la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1}\left(x\mapsto \frac{x^n}{\sqrt{n}}\right)$ converge uniformément sur $[-1,0[$. En particulier, f est continue en -1.

Conclusion : $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est continue sur } [-1,1[.}$

(4) *Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R,R[$.*

Correction. Comme f est la somme d'une série entière de rayon de convergence $R=1$, on sait d'après le cours que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.

Conclusion : $\boxed{f \text{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur }]-1,1[.}$

(5) *On cherche désormais à étudier l'allure de la courbe représentative de f sur son domaine de définition.*

(a) *Quel est le signe de $f'(x)$ pour $x\in[0,R[$?*

Correction. On peut dériver une série entière termes à termes sur $]-R,R[$. Ici $R=1$, et pour tout $x\in]-1,1[$,

$$f'(x)=\sum_{n\geqslant 1}\frac{nx^{n-1}}{\sqrt{n}}.$$

Pour $x\in[0,1[$, tous les termes $\frac{nx^{n-1}}{\sqrt{n}}$ sont positifs et donc $f'(x)\geqslant 0$.

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } x\in[0,R[,\ f'(x)\geqslant 0.}$

(b) *Montrer : $\lim_{\substack{x\to R\\ x<R}} f(x)=+\infty$.*

Correction. Pour tout $n\geqslant 1$, on a $\sqrt{n}\leqslant n$ donc pour tout $x\in[0,1[$,

$$f(x)\geqslant\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)\xrightarrow{x\to 1-}+\infty.$$

Par conséquent, $\boxed{\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=+\infty.}$

(c) *Exprimer* $(1-x)f'(x)$ *sous forme d'une série entière pour* $x \in]-R,R[$. *En déduire le signe de* $f'(x)$ *sur* $]-R,0[$.
Indication : on pourra écrire x sous la forme $x=-t$, avec $t \in]0,R[$ et reconnaître une série alternée.

Correction. D'après la question (5) (a), on a pour tout $x \in]-1,1[$,

$$f'(x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{nx^{n-1}}{\sqrt{n}}.$$

On a donc pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\begin{aligned}(1-x)f'(x) &= \sum_{n\geqslant 1} \frac{nx^{n-1}}{\sqrt{n}} - \sum_{n\geqslant 1} \frac{nx^n}{\sqrt{n}} = 1 + \sum_{n\geqslant 1} \frac{(n+1)x^n}{\sqrt{n+1}} - \sum_{n\geqslant 1} \frac{nx^n}{\sqrt{n}} \\ &= 1 + \sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{(n+1)}{\sqrt{n+1}} - \frac{n}{\sqrt{n}} \right) x^n = 1 + \sum_{n\geqslant 1} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) x^n \\ &= 1 + \sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \right) x^n = \sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \right) x^n\end{aligned}$$

Pour $x \in]-1,0[$, écrivons $x=-t$, avec $t \in]0,1[$. On a alors

$$(1-x)f'(x) = \sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \right) t^n.$$

Pour tout $t \in]0,1[$, la série $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \right) t^n$ est une série alternée car la suite $\left(\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \right) t^n \right)$ est positive, décroissante et tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
D'après les propriétés des séries alternées, on en déduit que $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \right) t^n$ est du signe du premier terme, c'est-à-dire 1.

Rappel : la somme d'une série alternée $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n a_n$ *est du signe du premier terme.*

On a donc pour tout $x \in]-1,0[$, $(1-x)f'(x) \geqslant 0$, et donc $f'(x) \geqslant 0$ car $1-x \geqslant 0$ pour tout $x \in]-1,0[$.

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } x \in]-1,0[,\ f'(x) \geqslant 0.}$

(d) *Donner l'allure de la courbe représentative de* f *sur son domaine de définition.*

Correction. D'après les questions (5) (a) et (5) (c), f est croissante sur $[-1,1[$. Par ailleurs, on a $f(0)=0$, et d'après la question (5) (b), $\lim\limits_{\substack{x\to R \\ x<R}} f(x) = +\infty$ tandis que $f(-1)$ est fini (et < 0). Ceci donne une allure de la courbe sur $[-1,1[$.
Faire une figure !!!!

Exercice 3 (Étude d'une équation différentielle)**.** *On considère l'équation différentielle*

$$(E): \quad y'' + xy' + y = 1.$$

On admet que l'équation différentielle (E) admet une unique solution vérifiant $y(0)=y'(0)=0$. Le but de cet exercice est de déterminer cette unique solution, et de montrer que celle-ci est développable en série entière.

(1) *Supposons qu'il existe une série entière* $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ *de rayon de convergence* R *strictement positif dont la somme* $f :]-R,R[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *est solution de l'équation différentielle* (E) *et vérifie* $f(0) = f'(0) = 0$.

(a) *Montrer que la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie une relation de récurrence que l'on précisera.*

Correction. D'après le cours sur les séries entières, on sait que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R,R[$. De plus, pour tout $x\in]-R,R[$, on a

$$f'(x)=\sum_{n\geqslant 1} n a_n x^{n-1} \quad \text{et} \quad f''(x)=\sum_{n\geqslant 2} n(n-1)a_n x^{n-2}.$$

Dire que f est solution de (E) équivaut donc à :

$$\begin{aligned} &\forall\, x\in]-R,R[,\quad \sum_{n\geqslant 2} n(n-1)a_n x^{n-2}+\sum_{n\geqslant 1} n a_n x^n+\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n=1\\ \iff &\forall\, x\in]-R,R[,\quad \sum_{n\geqslant 0}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+\sum_{n\geqslant 0} n a_n x^n+\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n=1\\ \iff &\forall\, x\in]-R,R[,\quad \sum_{n\geqslant 0}((n+2)(n+1)a_{n+2}+(n+1)a_n)x^n=1. \end{aligned}$$

Comme $a_0=f(0)=0$ et $a_1=f'(0)=0$, on en déduit

$$\begin{cases} 2a_2=1\\ \forall\, n\in\mathbb{N}^*,\quad (n+2)(n+1)a_{n+2}+(n+1)a_n=0, \end{cases}$$

par unicité du développement en série entière sur $]-R,R[$.

Conclusion : $\boxed{a_2=\dfrac{1}{2} \text{ et pour tout } n\in\mathbb{N}^*,\ a_{n+2}=-\dfrac{a_n}{n+2}.}$

(b) *Calculer explicitement a_n pour tout $n\geqslant 0$. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ obtenue ?*

Correction. Tout d'abord, comme $a_1=0$, on déduit de la question (1) (a) que $a_{1+2p}=0$ pour tout $p\in\mathbb{N}$. De plus, pour tout $p\geqslant 1$,

$$a_{2p}=-\frac{a_{2p-2}}{2p}=(-1)^2\frac{1}{2p}\times\frac{a_{2p-4}}{2p-2}=\cdots=(-1)^p\frac{1}{2p}\times\frac{1}{2p-2}\times\cdots\times\frac{a_2}{2}=(-1)^{p+1}\frac{1}{2^p p!}.$$

Vérifions la formule (obtenue de façon peu rigoureuse) par récurrence.

$*$ La formule est vraie pour $p=1$, car $a_2=\dfrac{1}{2}=(-1)^2\dfrac{1}{2^1 1!}$.

$*$ Supposons la formule $a_{2p}=(-1)^{p+1}\dfrac{1}{2^p p!}$ vraie pour un certain $p\in\mathbb{N}^*$, et montrons

$$a_{2(p+1)}=(-1)^{p+2}\frac{1}{2^{p+1}(p+1)!}.$$

On a d'après la question (1) (a) et l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} a_{2(p+1)}=a_{2p+2}&=-\frac{a_{2p}}{2p+2}=-(-1)^{p+1}\frac{1}{2^p p!}\times\frac{1}{2p+2}\\ &=(-1)^{p+2}\frac{1}{2^p p!}\times\frac{1}{2(p+1)}=(-1)^{p+2}\frac{1}{2^{p+1}(p+1)!}, \end{aligned}$$

d'où la formule pour $p+1$.

Par récurrence, on a donc pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, $a_{2p}=(-1)^{p+1}\dfrac{1}{2^p p!}$.

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } p\in\mathbb{N}^*,\ a_{2p+1}=0 \text{ et } a_{2p}=(-1)^{p+1}\dfrac{1}{2^p p!}.}$

De plus, le rayon de la série entière obtenue est $R=+\infty$. En effet, posons $X=x^2$. Alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n=\sum_{p=1}^{+\infty} a_{2p}x^{2p}=\sum_{p=1}^{+\infty}(-1)^{p+1}\frac{1}{2^p p!}X^p.$$

Appliquons la règle de d'Alembert à la série entière $\sum_{p\geqslant 1}(-1)^{p+1}\frac{1}{2^p p!}X^p$. On a

$$\left|(-1)^{p+2}\frac{1}{2^{p+1}(p+1)!}\times\frac{2^p p!}{(-1)^{p+1}}\right| = \frac{2^p p!}{2^{p+1}(p+1)!} = \frac{1}{2(p+1)} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On en déduit que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est de rayon de convergence infini aussi.

<u>Conclusion</u> : $\boxed{\text{le rayon de convergence de la série entière } \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n \text{ obtenue est } R=+\infty.}$

(c) *Exprimer la série entière obtenue* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *à l'aide de fonctions usuelles.*
(Indication : se rapprocher du développement en série entière de la fonction exponentielle.)

<u>Correction</u>. D'après la question (1) (b), on a pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{p=1}^{+\infty} a_{2p}x^{2p} = \sum_{p=1}^{+\infty}(-1)^{p+1}\frac{1}{2^p p!}x^{2p} = -\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p!}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^p \\ = -\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{p!}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^p + 1 = 1-\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).\end{aligned}$$

<u>Conclusion</u> : $\boxed{\text{pour tout } x\in\mathbb{R},\ f(x)=1-\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).}$

(2) *Conclure en donnant l'unique solution de l'équation différentielle* (E) *vérifiant* $y(0)=y'(0)=0$. *Justifier que cette solution est développable en série entière.*

<u>Correction</u>. Vérifie que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=1-\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ est solution de l'équation différentielle (E). On a pour tout $x\in R$,

$$f'(x) = x\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad f''(x)=(1-x^2)\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right),$$

d'où pour tout $x\in R$,

$$f''(x)+xf'(x)+f(x) = (1-x^2)\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) + x^2\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) + 1-\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = 1.$$

De plus, $f(0)=f'(0)=0$.

On sait que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ d'après la question (1). Précisément, pour tout $x\in\mathbb{R}$

$$f(x)=\sum_{p=1}^{+\infty}(-1)^{p+1}\frac{1}{2^p p!}x^{2p}.$$

<u>Conclusion</u> : $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est l'unique solution de l'équation différentielle } (E) \text{ vérifiant } y(0)=y'(0)=0.}$

Exercice 4 (Exponentielle de matrice et système différentiel)**.** *Posons*

$$A=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}.$$

(1) *Calculer B^2. En déduire e^{tB} pour tout $t \in \mathbb{R}$.*

Correction. On a $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On en déduit que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^{tB} = I_2 + tB + 0$

Conclusion : $\boxed{B^2 = 0 \text{ et pour tout } t \in \mathbb{R},\ e^{tB} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.}$

(2) *Remarquer que $A = 2I_2 + B$ puis montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a : $e^{tA} = e^{2t}e^{tB}$. En déduire e^{tA} pour tout $t \in \mathbb{R}$.*

Correction. Clairement, $A = 2I_2 + B$, d'où $tA = 2tI_2 + tB$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Or les matrices $2tI_2$ et tB commutent pour tout $t \in \mathbb{R}$. D'après le cours, on en déduit que

$$e^{tA} = e^{2tI_2 + tB} = e^{2tI_2}e^{tB} = e^{2t}I_2 \times e^{tB} = e^{2t}e^{tB}.$$

D'après la question (1), on en déduit que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\boxed{e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.}$

(3) *Résoudre le système différentiel autonome suivant, d'inconnue (x, y) :*

$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 2y. \end{cases}$$

Correction. Le système différentiel est équivalent à l'équation matricielle

$$(E_0): \qquad Y' = AY,$$

d'inconnue $Y\colon \mathbb{R} \to \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ de classe $\mathscr{C}^1$. On sait d'après le cours que les solutions de (E_0) sont les applications $Y\colon \mathbb{R} \to e^{tA}Y_0$, où $Y_0 = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

L'ensemble des solutions $\mathscr{S}_0$ du système différentiel sont donc les couples applications (x, y), avec $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \lambda e^{2t} + t\mu e^{2t}$, $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \mu e^{2t}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Conclusion : $\boxed{\mathscr{S}_0 = \big\{(x, y)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x(t) = \lambda e^{2t} + t\mu e^{2t},\ y(t) = \mu e^{2t}\ ;\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\big\}.}$

(4) *Résoudre le système différentiel suivant d'inconnue (x, y) :*

$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 2y + 1. \end{cases}$$

Correction. Cherchons une solution particulière à l'aide de la méthode de variation de la constante. On cherche une solution Y sous la forme :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad Y(t) = e^{tA}\Lambda(t),$$

où $\Lambda\colon \mathbb{R} \to \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est de classe $\mathscr{C}^1$. Dire que Y est solution de l'équation matricielle

$$(E): \quad Y' = AY + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

équivaut à dire que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$e^{tA}(A\Lambda(t) + \Lambda'(t)) = Ae^{tA}\Lambda(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ou encore que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\Lambda'(t)e^{tA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

car $e^{tA}A = Ae^{tA}$ d'après le cours, d'où pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\Lambda'(t) = e^{-tA}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

car pour tout $t \in \mathbb{R}$, e^{tA} est inversible d'inverse e^{-tA}.

Ecrivons $\Lambda = \begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix}$, avec $\lambda, \mu \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. On a pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\lambda'(t) = -te^{-2t}$, $\mu'(t) = e^{-2t}$. Une primitive de $-te^{-2t}$ est par exemple $t \mapsto \dfrac{t}{2}e^{-2t} + \dfrac{e^{-2t}}{4}$ comme on le montre facilement à l'aide d'une intégration par partie. Une primitive de e^{-2t} est par exemple $t \mapsto \dfrac{-e^{-2t}}{2}$.

Notons $\mathscr{S}$ les solutions du système différentiel. Une solution particulière de $\mathscr{S}$ est donc donnée par $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$t \mapsto e^{tA}\Lambda(t) = \begin{pmatrix}e^{2t} & te^{2t}\\ 0 & e^{2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{t}{2}e^{-2t} + \frac{e^{-2t}}{4}\\ \frac{-e^{-2t}}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{t}{2} + \frac{1}{4} - \frac{t}{2}\\ -\frac{t}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

D'après le cours et la question (3), on conclut que

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{(x, y) \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x(t) = \lambda e^{2t} + t\mu e^{2t} + \frac{1}{4},\ y(t) = \mu e^{2t} - \frac{1}{2}\ ;\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}.}$$