L2 Informatique

2018/2019

M31 - Algèbre

—

FICHE 1 : RÉVISIONS

I. Espaces vectoriels

Exercice 1. Trouver les solutions des systèmes d'équations :

1. $\begin{cases} x+y+2z=5 \\ x-y-z=1 \\ x+z=3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x+2z=0 \\ 3y+z+3t=0 \\ x+y+z+t=0 \\ 2x-y+z-t=0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x-y+z-t=1 \\ x+y-z-t=-1 \\ x+y+y-t=0 \\ x-y-z+t=2 \end{cases}$

Exercice 2. Déterminer lesquels des ensembles E_1, E_2, E_3 et E_4 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
$E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 7y = z\}$
$E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - z^2 = 0\}$.
$E_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = x + y + z = 0\}$.
$E_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z(x^2 + y^2) = 0\}$.

Exercice 3. Soient dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $\vec{v_1}(1,1,0)$, $\vec{v_2}(4,1,4)$ et $\vec{v_3}(2,-1,4)$.

1. Montrer que $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ ne sont pas colinéaires. Faire de même avec $\vec{v_1}$ et $\vec{v_3}$, puis avec $\vec{v_2}$ et $\vec{v_3}$.
2. La famille $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$ est-elle libre ?

Exercice 4. Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. $\vec{v_1}(1,0,1)$, $\vec{v_2}(0,2,2)$ et $\vec{v_3}(3,7,1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. $\vec{v_1}(1,0,0)$, $\vec{v_2}(0,1,1)$ et $\vec{v_3}(1,1,1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
3. $\vec{v_1}(1,2,1,2,1)$, $\vec{v_2}(2,1,2,1,2)$, $\vec{v_3}(1,0,1,1,0)$ et $\vec{v_4}(0,1,0,0,1)$ dans $\mathbb{R}^5$.
4. $\vec{v_1}(2,4,3,-1,-2,1)$, $\vec{v_2}(1,1,2,1,3,1)$ et $\vec{v_3}(0,-1,0,3,6,2)$ dans $\mathbb{R}^6$.
5. $\vec{v_1}(2,1,3,-1,4,-1)$, $\vec{v_2}(-1,1,-2,2,-3,3)$ et $\vec{v_3}(1,5,0,4,-1,7)$ dans $\mathbb{R}^6$.

Exercice 5. On considère dans $\mathbb{R}^n$ une famille de 4 vecteurs linéairement indépendants : $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4})$. Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. $(\vec{e_1}, 2\vec{e_2}, \vec{e_3})$.
2. $(\vec{e_1}, \vec{e_3})$.
3. $(\vec{e_1}, 2\vec{e_1} + \vec{e_4}, \vec{e_4})$.
4. $(3\vec{e_1} + \vec{e_3}, \vec{e_3}, \vec{e_2} + \vec{e_3})$.
5. $(2\vec{e_1} + \vec{e_2}, \vec{e_1} - 3\vec{e_2}, \vec{e_4}, \vec{e_2} - \vec{e_1})$.

Exercice 6. Soient dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $v_1 = (1,2,3,4)$ et $v_2 = (1,-2,3,-4)$. Peut-on déterminer x et y pour que $(x,1,y,1) \in \mathrm{Vect}\{v_1, v_2\}$? Et pour que $(x,1,1,y) \in \mathrm{Vect}\{v_1, v_2\}$?

Exercice 7. Parmi les familles de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivantes, lesquelles forment une base de $\mathbb{R}^3$:

1. $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$.
2. $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$.
3. $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$.
4. $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

Exercice 8. Montrer que $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0 \text{ et } 2x - y + 3z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en donner une base.

Exercice 9. Dans $\mathbb{R}^4$ on considère l'ensemble E des vecteurs (x_1, x_2, x_3, x_4) vérifiant $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. L'ensemble E est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$? Si oui, en donner une base.

Exercice 10. Déterminer une base et la dimension des espaces vectoriels suivants :
$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0\}$.
$E_2 = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = \dots = x_n\}$.
$E_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y = x + z - t = 0\}$.

Exercice 11. Dans les deux cas suivants, Déterminer la somme $F + G$, dire si cette somme est directe et si les sous-espace F et G sont supplémentaires.

1. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x - y + z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x - 2y = x + 3z = 0\}$.
2. $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x + y - 2z = x - t = 0\}$ et $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, 2x + z - t = y - 3z = 0\}$.

Exercice 12. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et soient F et G deux sous-espaces de E.

1. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.
2. Soit H un troisième sous-espace vectoriel de E. Prouver que $G \subset F$ si et seulement si $F \cap (G + H) = G + (F \cap H)$.

Exercice 13. On suppose que $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ sont des vecteurs indépendants de $\mathbb{R}^n$.

1. Les vecteurs $v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, \dots, v_{n-1} - v_n, v_n - v_1$ sont-ils linéairement indépendants ?
2. Les vecteurs $v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, \dots, v_{n+1} + v_n, v_n + v_1$ sont-ils linéairement indépendants ?
3. Les vecteurs $v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3, v_1 + v_2 + v_3 + v_4, \dots, v_1 + v_2 + \dots + v_n$ sont-ils linéairement indépendants ?

II. Applications linéaires

1. Montrer que β' est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Pour $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, calculer $u(x)$.
3. Montrer que $u(a) = 3a - 3c, u(b) = 3b + 3c$ et $u(c) = -3a + 3b + 3c$.

Exercice 14. Soit $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par

$$u(x_1, x_2, x_3) = (-2x_1 + 4x_2 + 4x_3, -x_1 + x_3, -2x_1 + 4x_2 + 4x_3).$$

1. Montrer que u est linéaire.
2. Déterminer une base de $\ker(u)$ et de $\mathrm{Im}(u)$.
3. A-t-on $\ker(u) \oplus \mathrm{Im}(u) = \mathbb{R}^3$?

Exercice 15. Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ définie pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ par

$$f(x, y, z, t) = (x - 2y, x - 2y, 0, x - y - z - t).$$

1. Montrer que f est une application linéaire.

2. Déterminer le noyau et l'image de f.
3. A-t-on $\ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^4$?

Exercice 16. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont l'image de la base canonique $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ est :

$$f(e_1) = -7e_1 - 6e_2, \quad f(e_2) = 8e_1 + 7e_2, \quad f(e_3) = 6e_1 + 6e_2 - e_3.$$

1. Pour tout vecteur $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$, déterminer $f \circ f(x)$.
2. En déduire que f est bijective et déterminer f^{-1}.

Exercice 17. Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire telle que

$$\begin{aligned} f(e_1) &= -\frac{1}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3, \\ f(e_2) &= \frac{2}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3, \\ f(e_3) &= \frac{2}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 - \frac{1}{3}e_3. \end{aligned}$$

Soit $E_{-1} = \{u \in \mathbb{R}^3 \ / \ f(u) = -u\}$ et $E_1 = \{u \in \mathbb{R}^3 \ / \ f(u) = u\}$.

1. Montrer que E_{-1} et E_1 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que $e_1 - e_2$ et $e_1 - e_3$ appartiennent à E_{-1} et que $e_1 + e_2 + e_3$ appartient à E_1.
3. Que peut-on en déduire sur les dimensions de E_1 et E_{-1} ?
4. Déterminer $E_{-1} \cap E_1$. A-t-on $E_{-1} \oplus E_1 = \mathbb{R}^3$.
5. Calculer $f^2 = f \circ f$ et en déduire que f est bijective et déterminer f^{-1}.

Exercice 18. Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $a = \frac{1}{3}(2, -2, 1)$, $b = \frac{1}{3}(2, 1, -2)$ et $c = \frac{1}{3}(1, 2, 2)$. Soit $\beta' = (a, b, c)$, soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\begin{aligned} u(e_1) &= 3e_1 + e_2 - e_3, \\ u(e_2) &= e_1 + 7e_2, \\ u(e_3) &= -e_1 - e_3. \end{aligned}$$

Exercice 19. Soit p l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qui à tout vecteur $u = (x, y, z)$ associe le vecteur

$$p(u) = (2x + y + 2z, y, -x - y - z).$$

Soit e_1, e_2, e_3 la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On note $p^2 = p \circ p$.

1. Montrer que p est une application linéaire.
2. Calculer $p(e_1)$, $p(e_2)$, $p(e_3)$ puis $p^2(e_1)$, $p^2(e_2)$ et $p^2(e_3)$. Que peut-on en déduire sur $p^2(u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}^3$?
3. Donner une base de $\mathrm{Im}p$ et une base de $\ker(p - Id)$. Montrer que ces deux sous-espaces sont égaux.
4. Montrer que $\ker(p) \oplus \mathrm{Im}(p) = \mathbb{R}^3$.

Exercice 20. Soit E un espace vectoriel. Soit f un endomorphisme de E tel que $f^2 = f \circ f = Id_E$. On pose $E_1 = \ker(f - Id_E)$ et $E_2 = \ker(f + Id_E)$.

1. Soit $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$. Calculer $f(x_1)$ et $f(x_2)$.
2. Pour tout $x \in E$, écrire $x = \frac{1}{2}(f(x) + x) - \frac{1}{2}(f(x) - x)$ et montrer que $E_1 \oplus E_2 = E$.
3. On suppose que E est de dimension finie et que $f \neq \pm Id_E$. Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une base de E tel que $E_1 = \langle v_1, \ldots, v_r \rangle$ et $E_2 = \langle v_{r+1}, \ldots, v_n \rangle$. Calculer $f(v_i)$ dans la base $(v_1, \ldots, v_n)$.

Exercice 21. Soit $\beta = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ tel que $u(e_1) = e_1 + e_2$ et $\dim \ker(u) = 1$.

1. Quelle est la dimension de $\mathrm{Im}(u)$? En déduire qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $u(e_2) = a(e_1 + e_2)$.
2. Déterminer l'image d'un vecteur $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ en fonction de a.
3. Déterminer une base de $\ker(u)$.

Exercice 22. Soit $f := \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ par

$$f(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4.$$

On note $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

1. Calculer les images des vecteurs de la base canonique par f. En déduire la dimension de $\mathrm{Im}(f)$.
2. Déterminer la dimension de $\ker(f)$ et en donner une base.

Exercice 23. Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension respectives n et p et soit $u \in \mathcal{L}(E, f)$.

1. Montrer que $n < p$ alors u n'est pas surjective.
2. Montrer que si $n > p$, alors u n'est pas injective.

Exercice 24. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que $\ker(u) \subset \ker(u^2)$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(u^2) \subset \mathrm{Im}(u)$.
3. Montrer que $\ker(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{\vec{0}\}$ si et seulement si $\ker(u) = \ker(u^2)$.

Exercice 25. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ où E est un espace de dimension n avec n pair. Montrer que $\mathrm{Im}(u) = \ker(u)$ si et seulement si $u^2 = 0$ et $n = 2\dim(\mathrm{Im}(u))$.

Exercice 26. Soient : E, F et G trois sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^N$, f une application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans G. On rappelle que $g \circ f$ est l'application de E dans G définie par $g \circ f(v) = g(f(v))$, pour tout vecteur v de E.

1. Montrer que $g \circ f$ est une application linéaire.
2. Montrer que $f\big(\ker(g \circ f)\big) = \ker g \cap \mathrm{Im} f$.

Exercice 27. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications linéaires. Montrer que $\ker(f) \subset \ker(g \circ f)$ et $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$.

Exercice 28. Soient E un espace vectoriel et φ une application linéaire de E dans E. On suppose que $\mathrm{Ker}\ (\varphi) \cap \mathrm{Im}\ (\varphi) = \{0\}$. Montrer que, si $x \notin \mathrm{Ker}\ (\varphi)$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\varphi^n(x) \neq 0$.

Exercice 29. Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Soit $u : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ qui à un vecteur $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ associe le vecteur $u(x) \in \mathbb{R}^4$ défini par :

$$u(x) = (x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4, x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4, -x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4, -x_1 + x_2 - x_3 - x_4).$$

1. Montrer que u est une application linéaire.
2. Déterminer une base de $\ker(u)$.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(u)$.
4. Déterminer la ou les équations caractérisant $\mathrm{Im}(u)$.

Exercice 30. Soit $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ une base de $\mathbb{R}^3$ et λ un nombre réel. Soit $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par la donnée de $\phi(\vec{e_1}) = \vec{e_1} + \vec{e_2}$, $\phi(\vec{e_2}) = \vec{e_1} - \vec{e_2}$ et $\phi(\vec{e_3}) = \vec{e_1} + \lambda\vec{e_3}$.

1. Ecrire l'image du vecteur $\vec{v} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3}$.
2. Comment choisir λ pour que ϕ soit injective ?

3. Comment choisir λ pour que ϕ soit surjective ?

Exercice 31. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^3 = f^2 + f + id$. Montrer que f est un automorphisme et déterminer f^{-1}.

Exercice 32. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit f une application linéaire de E dans E. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. $E = \mathrm{Im}(f) \bigoplus \mathrm{Ker}(f)$,
2. $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$,
3. $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$.

Exercice 33. Soit E un espace vectoriel, et u une application linéaire de E dans E. Dire si les propriétés suivantes sont vraies ou fausses :

1. Si $e_1, e_2, \dots, e_p$ est libre, il en est de même de $u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_p)$.
2. Si $u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_p)$ est libre, il en est de même de $e_1, e_2, \dots, e_p$.
3. Si $e_1, e_2, \dots, e_p$ est génératrice, il en est de même de $u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_p)$.
4. Si $u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_p)$ est génératrice, il en est de même de $e_1, e_2, \dots, e_p$.
5. Si $u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_p)$ est une base de Im u, alors $e_1, e_2, \dots, e_p$ est une base d'un sous-espace vectoriel supplémentaire de Ker u.

III. Matrices

Exercice 34. On considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -6 & 7 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 & 7 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \\ 1 & 6 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer AB et BA.

Exercice 35. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Soient $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$
   Montrer que $AB = AC$, a-t-on $B = C$? A peut-elle être inversible ?
2. Déterminer toutes les matrices F telles que $A \times F = O$ (O étant la matrice dont tous les coefficients sont nuls).

Exercice 36. Soit A la matrice définie par $A = \begin{pmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est inversible et calculer son inverse A^{-1}.
2. En déduire A^n pour tout n entier.

Exercice 37. Soit A la matrice définie par $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2.
2. Trouver un polynôme de degré 2 tel que $P(A) = 0$.

3. En déduire A^{-1}.
4. Calculer A^{-1} directement.

Exercice 38. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et A^3. Calculer $A^3 - A^2 + A - I$.
2. Exprimer A^{-1} en fonction de A^2, A et I.
3. Exprimer A^4 en fonction de A^2, A et I.

Exercice 39. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(A - 2I)^3$.
2. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1} en fonction de A^2, A et I.

Exercice 40. Soient A et B deux matrices carrées $n \times n$ telles que $AB = A + I_n$.
Montrer que A est inversible et déterminer son inverse (en fonction de B).

Exercice 41.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et soit $B = A - I_3$.
   (a) Calculer B^2, B^3 en déduire une formule de récurrence que l'on démontrera pour B^n, pour tout entier n.
   (b) Développer $(B + I_3)^n$ par la formule du binôme et simplifier.
   (c) En déduire A^n Pour tout entier n.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pour tout entier n, calculer A^n en utilisant $A - I_4$.

Exercice 42. Soit A la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. On considère les suite récurrentes suivantes

$$\begin{cases} u_n = u_{n-1} + 2v_{n-1} + 3w_{n-1} \\ v_n = v_{n-1} + 2w_{n-1} \\ w_n = w_{n-1} \end{cases}$$

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer u_n, v_n et w_n en fonction de u_0, v_0 et w_0.

VI. Matrice d'une application linéaire et matrices de passage

Exercice 43. Soit $u : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ une application linéaire, $\underline{e} = (e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$ et $\underline{f} = (f_1, \dots, f_q)$ la base canonique de $\mathbb{R}^q$.

1. On suppose que $p = 3$, $q = 2$, $u(e_1) = f_1 + 2f_2$, $u(e_2) = 2f_1 - f_2$ et $u(e_3) = -f_1 + f_2$.

   (a) Déterminer l'image d'un vecteur $x = (x_1, x_2, x_3)$ par u.
   (b) Déterminer la matrice de u de la base $\underline{e}$ dans la base $\underline{f}$.
   (c) Déterminer le noyau et l'image de u.
2. On suppose que $p = q = 3$, $u(e_1) = 3e_1 + 2e_2 + 2e_3$, $u(e_2) = 2e_1 + 3e_2 + 2e_3$ et $u(e_3) = 2f_1 + 2f_2 + 3e_3$.
   (a) Déterminer l'image d'un vecteur $x = (x_1, x_2, x_3)$ par u.
   (b) Déterminer la matrice de u de la base $\underline{e}$ dans la base $\underline{e}$.
   (c) Déterminer le noyau et l'image de u.

Exercice 44. Soit $u : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ une application linéaire, $\underline{e} = (e_1, \ldots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$ et $\underline{f} = (f_1, \ldots, f_q)$ la base canonique de $\mathbb{R}^q$.

1. On suppose que $p = 2$, $q = 3$ et que la matrice de u de la base $\underline{e}$ dans la base $\underline{f}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Déterminer l'image d'un vecteur $x = (x_1, x_2)$ par u.
   (b) Déterminer $u(e_1)$ et $u(e_2)$.
   (c) Déterminer le noyau et l'image de u.
2. On suppose que $p = q = 4$, et que la matrice de u de la base $\underline{e}$ dans la base $\underline{f}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & -5 \end{pmatrix}.$$

   (a) Déterminer l'image d'un vecteur $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ par u.
   (b) Déterminer $u(e_1)$, $u(e_2)$, $u(e_3)$ et $u(e_4)$.
   (c) Déterminer le noyau et l'image de u.

Exercice 45. Soit $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire, $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. On suppose que pour tout $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

$$u(x) = (x_1 + x_2, 2x_1 - x_3, 3x_1 + x_2 - x_3).$$

   (a) Déterminer $u(e_1)$, $u(e_2)$, et $u(e_3)$.
   (b) Déterminer la matrice de u de la base $\underline{e}$ dans la base $\underline{e}$.
   (c) Déterminer le noyau et l'image de u.
2. On suppose que pour tout $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

$$u(x) = (x_1 + x_2, x_1 + x_2, x_1 + x_2).$$

   (a) Déterminer $u(e_1)$, $u(e_2)$, et $u(e_3)$.
   (b) Déterminer la matrice de u de la base $\underline{e}$ dans la base $\underline{e}$.
   (c) Déterminer le noyau et l'image de u.

Exercice 46. L'application linéaire $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ définie par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

est-elle surjective ?

Exercice 47. Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans les base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$ est
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 5 & -11 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une base du noyau de f.
2. Déterminer une base de l'image de f. Quel est le rang de A ?

Exercice 48. Soit (e_1, e_2, e_3) une base de l'espace E à trois dimensions sur un corps K. I_E désigne l'application identique de E. On considère l'application linéaire f de E dans E telle que :

$$f(e_1) = 2e_2 + 3e_3, \quad f(e_2) = 2e_1 - 5e_2 - 8e_3, \quad f(e_3) = -e_1 + 4e_2 + 6e_3.$$

1. Étudier le sous-espace $\ker(f - I_E)$: dimension, base.
2. Étudier le sous-espace $\ker(f^2 + I_E)$: dimension, base.
3. Montrer que la réunion des bases précédentes constitue une base de E. Quelle est la matrice de f dans cette nouvelle base ? et celle de f^2 ?

Exercice 49. Ecrire les matrices des applications suivantes dans les bases canoniques de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$:

1. $\begin{array}{cccc} f : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y) & \mapsto & (2x - y, x + y, x) \end{array}.$
2. $\begin{array}{cccc} f : & \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y, z, t) & \mapsto & (x + y, x + t) \end{array}.$
3. $\begin{array}{cccc} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ & x & \mapsto & (x, x, x) \end{array}.$

Exercice 50. On travaille dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel V de dimension 3 dont une base est notée (e_1, e_2, e_3).

1. Prouver que les vecteurs f_1, f_2, f_3 tels que
$$f_1 = e_1 - e_2 + e_3, f_2 = e_1 + e_2, f_3 = e_1 + e_3.$$
forment une base V.
2. Déterminer la matrice de passage P de la base e_1, e_2, e_3 à f_1, f_2, f_3.
3. Quelles sont les coordonnées du vecteur $v = e_1 + e_2 + e_3$ dans la base f_1, f_2, f_3 ?

Exercice 51. Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, soit $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $E_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \ / \ u(x) = x\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 1 dont on donnera un vecteur non nul a.
2. Soient $b = (0, 1, 1)$ et $c = (1, 1, 2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Calculer $u(b)$ et $u(c)$.
3. Montrer que $\beta' = (a, b, c)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Déterminer la matrice de passage P de β à β'.
5. Calculer P^{-1}.
6. Déterminer la matrice D de u dans la base β'.
7. Donner la relation entre A, P et D.

Exercice 52. Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, soit $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Soient $a = e_1 - e_2 + e_3$, $b = 2e_1 - e_2 + e_3$ et $c = 2e_1 - 2e_2 + e_3$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $\beta' = (a, b, c)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de passage P de β à β'.
3. Calculer P^{-1}.
4. Déterminer la matrice R de u dans la base β'.
5. Donner la relation entre A, P et R.
6. Calculer R^4. En déduire les valeurs de A^{4n}.

Exercice 53. Soit f un endomorphisme de E, espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 4 et soit $\mathcal{E} = e_1, ..., e_4$ une base de E. On suppose que pour tout $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4$ de E, on a : $f(x) = x_1e_1 + (x_2 + x_3)e_2 + (x_3 + x_4)e_3 + x_4e_4$.

1. Écrire la matrice A de f dans la base $\mathcal{E}$.
2. Montrer que $A - I$ est nilpotente, c'est à dire qu'il existe k tel que $(A - I)^k = 0$. Expliciter la relation entre I, A, A^2 et A^n.
3. Soit $\mathcal{E}' = (e'_1, ..., e'_4)$ la famille de vecteurs de E définie par
$$\begin{aligned} e'_1 &= e_1 - e_2 + e_3 \\ e'_2 &= e_2 - e_3 + e_4 \\ e'_3 &= e_3 \\ e'_4 &= e_4 \end{aligned}$$
Montrer que $\mathcal{E}'$ est une base. Écrire la matrice P de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}'$.
4. Soit A' la matrice de f dans la base $\mathcal{E}'$. Écrire A' en fonction de A et P et la calculer.

Exercice 54. Soit $E = \mathbb{R}^4$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} := (e_1, \ldots, e_4)$ et soit u l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est donnée par

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le noyau et l'image de u (on précisera une base de Ker u et Im u). Ces deux sous espaces vectoriels sont-ils supplémentaires ?
2. Compléter une base de Ker u en une base $\mathcal{B}'$ de E et écrire la matrice M' de u dans cette base $\mathcal{B}'$.

Exercice 55. Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique que $\mathbb{R}^3$ et soit $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application dont la matrice dans la base β est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}^3$ tel que $\ker(u) = \langle a \rangle$.
2. Déterminer $b \in \mathbb{R}^3$ tel que $u(b) = a$.
3. Montrer que $E_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \ / \ u(x) = x\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 1. Donner un vecteur $c \in E_1$ non nul.

4. Montrer que $\beta' = (a, b, c)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Déterminer la matrice T de u dans la base β'.
6. Donner la relation entre A, T et la matrice de passage Q de β à β'.

Exercice 56. Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On pose

$$\begin{aligned} a &= e_1 + 2e_2 + 3e_3 - 2e_4, \\ b &= e_2 + e_3, \\ c &= e_1 + 3e_2 + 5e_3 - 3e_4, \\ d &= -e_1 - e_2 - e_3, \end{aligned}$$

et $F = \langle a, b, c \rangle$.

1. Montrer que $\beta' = (a, b, c, d)$ est une base de $\mathbb{R}^4$ et donner la matrice de passage de β à β'.
2. Déterminer la matrice de u dans la base β'.
3. Montrer que pour tout $x \in F$, $u(x)$ appartient encore à F. En déduire que $v : F \to F$ défini pour tout $x \in F$ par $v(x) = u(x)$ est un endomorphisme de F. Déterminer la matrice de v dans la base $\gamma = (a, b, c)$.
4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^4$, il existe un unique couple $(f, g) \in F \times \langle d \rangle$ tel que $x = f + g$. Calculer $u(x)$ en fonction de f et g.

Exercice 57. Soit $\mathbb{R}_2[X] = \{a_0 + a_1X + a_2X^2 \ / \ a_i \in \mathbb{R}\}$ l'espace des polynômes réels de degré au plus 2 et soit $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. On considère l'application $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ définie pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$ par

$$f(P) = P(X + 1) - P(X).$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Soit $P(X) = a_1 + a_1X + a_2X^2$. Calculer $f(P)$ en fonction de a_0, a_1 et a_2.
3. Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
4. Montrer que $\mathcal{B}' = (1, X - 1; (X - 1)(X - 2))$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
5. Donner la matrice B de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 58. Soit $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ s'écrit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Expliciter une base de $\ker \phi$ et une base de $\mathrm{Im}\phi$.
2. Construire une nouvelle base $(e_1, \ldots, e_4)$ au départ et une nouvelle base $(f_1, \ldots, f_4)$ à l'arrivée telle que dans ces bases ϕ ait une matrice de la forme

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$