Université de Lille 1 Sciences et Technologies

L2 Informatique

2017/2018

Algèbre linéaire M31 - Devoir Surveillé N° 2

—

19 DÉCEMBRE 2017 - 10H30 À 12H30

Aucun document n'est autorisé, les calculatrices sont interdites.

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 & 14 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -7 & 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A ainsi que ses valeurs propres.
2. Montrer que A est trigonalisable.
3. La matrice A est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser, sinon, la trigonaliser.

Exercice 2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $D_n = \begin{vmatrix} a+b & a & \dots & a \\ b & a+b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \dots & b & a+b \end{vmatrix}$.

1. Calculer D_1, D_2 et D_3.
2. Montrer que $D_n = aD_{n-1} + b^n$.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $D_n = a^n + a^{n-1}b + \ldots + ab^{n-1} + b^n$.

Exercice 3. Soit $a \in \mathbb{R}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Pour quelles valeurs de a le noyau de f n'est pas réduit à $\{\vec{0}\}$? Justifier.
2. Montrer que le polynôme caractéristique P_f de f s'écrit $P_f(X) = (3-X)Q(X)$ où Q est un polynôme que l'on déterminera. Pour quelle(s) valeur(s) de a, 3 est-il racine multiple de P_f ?
3. Déterminer, en fonction de a, les valeurs propres de f, leur multiplicité algébrique, la dimension des sous-espaces propres associés.
4. Pour quelle(s) valeur(s) de a l'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Exercice 4. Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E non injectif et non identiquement nul. On note P_f le polynôme caractéristique de f.

1. Enoncer le théorème de Cayley-Hamilton
2. Enoncer le lemme des noyaux.
3. Montrer que pour tout k entier naturel, $\ker(f^k) \subset \ker(f^{k+1})$ et $\operatorname{Im}(f^{k+1}) \subset \operatorname{Im}(f^k)$.
4. Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tels que $P_f(X) = X^p Q(X)$ et $Q(0) \neq 0$. Préciser le degré de Q.
5. Montrer que $\operatorname{Im} f^p$ est inclus dans $\ker Q(f)$.
6. Montrer que $\dim(\operatorname{Im} f^p) = \dim(\ker Q(f)) = n - \dim(\ker f^p)$. En déduire que $E = \ker(f^p) \oplus \operatorname{Im}(f^p)$.