Université de Lille 1 Sciences et Technologies

L2 Informatique

2017/2018

Algèbre linéaire M31 - Devoir Surveillé N° 2

—

DURÉE 2 HEURES

Aucun document n'est autorisé, les calculatrices sont interdites.

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 & 14 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -7 & 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}$.

1. On calcule P_A le polynôme caractéristique de A :

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 11-X & 0 & 0 & 14 \\ 1 & 5-X & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3-X & -1 \\ -7 & 0 & 0 & -10-X \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -3-X & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 4-X & 1 & 1 \\ 0 & -4+X & 3-X & -1 \\ 3+X & 0 & 0 & -10-X \end{vmatrix}$$

$$C_1 - C_4 \quad C_2 - C_3$$

$$= (-3-X)(4-X) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3-X & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -10-X \end{vmatrix}$$

$$= (-3-X)(4-X) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4-X & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4-X \end{vmatrix}$$

$$C_3 - C_2 \quad C_4 - 14C_1 - C_2$$

$$= (-3-X)(4-X)^3$$

La matrice A a donc pour valeur propre -3 de multiplicité algébrique 1 et 4 de multiplicité algébrique 3.

2. Comme toute les racines de P_A sont réelles, A est trigonalisable sur $\mathbb{R}$.
3. Pour savoir si A est diagonalisable, on détermine $\ker(A - 4I)$: Soit $v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Nous avons

les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
v \in \ker(A-4I) &\Leftrightarrow \begin{cases} 7x & & & +14t & = 0 \\ x & +y & +z & +t & = 0 \\ -x & -y & -z & -t & = 0 \\ -7x & & & -14t & = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x & = -2t \\ y & = -z+t \end{cases} \\
&\Leftrightarrow v = \begin{pmatrix} -2t \\ -z+t \\ z \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On en déduit que $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ forment une base de $\ker(A-4I)$ qui est donc de dimension 2.
Comme la valeur propre 4 est de multiplicité algébrique 3, A n'est pas diagonalisable.
Pour trigonaliser A, on détermine encore $\ker(A-4I)^2$ et $\ker(A+3I)$. On calcule $(A-4I)^2$:

$$\begin{aligned}
(A-4I)^2 &= \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 14 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -7 & 0 & 0 & -14 \end{pmatrix}^2 \\
&= \begin{pmatrix} -49 & 0 & 0 & -98 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 49 & 0 & 0 & 98 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Soit $v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Nous avons les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
v \in \ker(A-4I)^2 &\Leftrightarrow 49x + 98t = 0 \\
&\Leftrightarrow x = -2t \\
&\Leftrightarrow v = \begin{pmatrix} -2t \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Les vecteurs $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ forment une base de $\ker(A-4I)^2$. Puisque le sous-espace caractéristique $\ker(A-4I)^3$ est de dimension 3 et qu'il contient $\ker(A-4I)^2$, on en déduit que $\ker(A-4I)^3 = \ker(A-4I)^2$.

Soit $v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Nous avons les équivalences suivantes :

$$v \in \ker(A + 3I) \Leftrightarrow \begin{cases} 14x & & & 14t & = 0 \\ x & +8y & +z & +t & = 0 \\ -x & -y & +6z & -t & = 0 \\ -7x & & & -7t & = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & & & +t & = 0 \\ 8y & +z & = 0 \\ -y & +6z & = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & +t & = 0 \\ 8y & +z & = 0 \\ 2y & & = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & = -t \\ y = z & = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow v = \begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une base de $\ker(A + 3I)$.

Soit $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = (A - 4I)v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Nous avons alors $Av_1 = -3v_1$ car v_1 appartient à $\ker(A+3I)$, $Av_2 = 4v_2$, $Av_3 = 4v_3$ car V_2 et v_3 appartiennent à $\ker(A - 4I)$ et $Av_4 = v_3 + 4v_4$ car par définition de $v_3 = (A - 4I)v_4$.

De plus v_1, v_2, v_3, v_4 est une base de $\mathbb{R}^4$ et la matrice $P = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice de passage de la base canonique à la base v_1, v_2, v_3, v_4. Soit enfin $T = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Nous avons alors $A = PTP^{-1}$.

Exercice 2.

1. Nous avons

$$\begin{aligned} D_1 &= \det(a + b) = a + b, \\ D_2 &= \det \begin{pmatrix} a+b & a \\ b & a+b \end{pmatrix} \\ &= (a+b)^2 - ab = a^2 + ab + b^2, \\ D_3 &= \det \begin{pmatrix} a+b & a & a \\ b & a+b & a \\ b & b & a+b \end{pmatrix} \\ &= (a+b)^3 + a^2b + b^2a - 3ab(a+b) \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + a^2b + b^2a - 3a^2b - 3ab^2 \\ &= a^3 + a^2b + ab^2 + b^3. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
D_n &= \begin{vmatrix} a+b & a & \dots & a \\ b & a+b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \dots & b & a+b \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a & a & \dots & a \\ 0 & a+b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \dots & b & a+b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & a & \dots & a \\ b & a+b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \dots & b & a+b \end{vmatrix} \\
&= aD_{n-1} + \begin{vmatrix} b & a & \dots & \dots & \dots & a \\ 0 & b & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -a & b & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -a & b & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -a & b \end{vmatrix} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - L_2 \\ \vdots \\ L_{n-1} - L_{n-2} \\ L_n - L_{n-1} \end{array} \\
&= aD_{n-1} + b \begin{vmatrix} b & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -a & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -a & b & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -a & b \end{vmatrix} \\
&= D_n = aD_{n-1} + b^n
\end{aligned}$$

où pour la dernière égalité, nous avons utilisé le fait que le déterminant d'une matrice triangulaire est égale au produits des éléments de sa diagonale.

3. L'égalité $D_n = a^n + a^{n-1}b + \dots + ab^{n-1} + b^n$ est vraie pour $n = 1, 2$ et 3 d'après la première question. Supposons la vérifiée au rang n. Il vient alors

$$\begin{aligned}
D_{n+1} &= aD_n + b^{n+1} \\
&= a(a^n + a^{n-1}b + \dots + b^n) + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + a^n b + \dots + ab^n + b^{n+1}.
\end{aligned}$$

L'égalité est donc encore vérifiée au rang $n + 1$.
On en déduit par récurrence que pour totu $n \in \mathbb{N}^*$, $D_n = a^n + a^{n-1}b + \dots + ab^{n-1} + b^n$.

Exercice 3.

1. On calcule $\det A$:

$$\begin{aligned}\det A &= 4a-1-1-a-2-2\\ &= 3a-6.\end{aligned}$$

On en déduit que $\det A \neq 0$ si et seulement si $a \neq 2$. Donc si $a \neq 2$, l'endomorphisme f est bijectif et $\ker f = \{\vec{0}\}$ et si $a = 2$, $\det f = 0$, f n'est pas bijective donc pas injective et $\ker f$ n'est pas réduit à $\{\vec{0}\}$.

2. Nous avons :

$$\begin{aligned}P_f(X) &= \begin{vmatrix} 2-X & -1 & 1\\ -1 & a-X & 1\\ 1 & 1 & 2-X\end{vmatrix}\\ &= \begin{vmatrix} 3-X & -1 & 1\\ 0 & a-X & 1\\ 3-X & 1 & 2-X\end{vmatrix}\\ &\quad C_1+C_3\\ &= (3-X)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1\\ 0 & a-X & 1\\ 1 & 1 & 2-X\end{vmatrix}\\ &= (3-X)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & a-X & 1\\ 1 & 2 & 1-X\end{vmatrix}\\ &\qquad\qquad\quad C_2+C_1 \quad C_3-C_1\\ &= (3-X)(X^2-(a+1)X+a-2).\end{aligned}$$

Ainsi, si $Q(X) = X^2-(a+1)X+a-2$, $P_f(X) = (X-3)Q(X)$.
3 sera une racine multiple de P_f si et seulement si a est une racine de Q. On détermine les racine de Q en fonction de a : Le discriminant de Q est $\Delta = (a+1)^2-4(a-2) = a^2-2a+9 = (a-1)^2+8 > 0$.
Par conséquent, Q a toujours deux racines : $X_1 = \frac{a+1+\sqrt{a^2-2a+9}}{2}$ et $X_2 = \frac{a+1-\sqrt{a^2-2a+9}}{2}$.
Nous avons :

$$\begin{aligned}X_1 = 3 &\Leftrightarrow a+1+\sqrt{a^2-2a+9} = 6\\ &\Leftrightarrow \sqrt{a^2-2a+9} = 5-a\\ &\Leftrightarrow a^2-2a+9 = (5-a)^2 = 25-10a+a^2 \text{ et } 5-a \geqslant 0\\ &\Leftrightarrow 8a = 16 \text{ et } a \leqslant 5\\ &\Leftrightarrow a = 2\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}X_2 = 3 &\Leftrightarrow a+1-\sqrt{a^2-2a+9} = 6\\ &\Leftrightarrow -\sqrt{a^2-2a+9} = 5-a\\ &\Leftrightarrow a^2-2a+9 = (5-a)^2 = 25-10a+a^2 \text{ et } 5-a \leqslant 0\\ &\Leftrightarrow 8a = 16 \text{ et } 5 \leqslant a\\ &\Leftrightarrow a = 2 \text{ et } 5 \leqslant a.\end{aligned}$$

Ainsi, 3 est racine double de P_f si et seulement si $a = 2$.

3. Si $a \neq 2$, 3 est une valeur propre simple de f donc le sous-espace propre associé est de dimension 1. Comme Q a un discriminant strictement positif ses racines $\frac{a+1+\sqrt{a^2-2a+9}}{2}$ et $\frac{a+1-\sqrt{a^2-2a+9}}{2}$ sont distinctes et sont donc des valeurs propres simples de f. Les sous-espaces propres sont donc chacun de dimension 1.

Si $a = 2$, 3 est une valeur propre de multiplicité algébrique 2 et $\frac{a+1-\sqrt{a^2-2a+9}}{2} = 0$ est une valeur propre simple. Par conséquent $\ker f$ est de dimension 1. Pour déterminer la dimension du sous-espace propre $\ker(f - 3I)$, on calcule le rang de $f - 3I$:

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(f-3I) &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Ainsi, d'après le théorème du rang $\dim \ker(f - 3I) = 3 - \operatorname{rg}(f - 3I) = 2$.

4. D'après la question 2, dans tous les cas, toutes les valeurs propres de f sont de multiplicités algébriques et géométriques égales donc f est toujours diagonalisable.

Exercice 4.

1. Voir cours.
2. Voir cours.
3. Soit $v \in \ker(f^k)$. Alors $f^{k+1}(v) = f \circ f^k(v) = f(\vec{0}) = \vec{0}$ donc v appartient à $\ker(f^{k+1})$.
   Soit $v \in \operatorname{Im}(f^{k+1})$. Il existe $w \in E$ tel que $f^{k+1}(w) = v$. Alors $v = f^k(f(w))$ donc v appartient à $\operatorname{Im}(f^k)$.
4. Comme f n'est pas injectif, $\ker f$ n'est pas réduit à $\{\vec{0}\}$ donc 0 est une valeur propre de f et donc une racine de P_f. Si on note 0 la multiplicité algébrique de la valeur propre 0, on a $P_f(X) = X^p Q(X)$ avec $Q(0) \neq 0$ sinon on pourrait mettre X en facteur dans Q et 0 serait une valeur propre de multiplicité algébrique strictement plus grande que p!
   Comme $P_f(X) = (-1)^n X^n + \ldots + \det f$, le coefficient dominant de Q est $(-1)^n$ et Q est de degré $n - p$.
5. D'après le théorème de Caley Hamilton, $P_f(f) = 0$. Ainsi, pour tout $v \in \operatorname{Im} f^p$, on peut écrire $v = f^p(w)$ pour un w dans E. Il vient alors, puisque $P_f(f) = 0$,
   $$Q(f)(v) = Q(f) \circ f^p(w) = \vec{0}$$
   et donc v appartient à $\ker Q(f)$. Cela montre que $\operatorname{Im} f^p) \subset \ker Q(f)$.
6. D'après le théorème du rang, nous avons $\dim(\operatorname{Im} f^p) = n - \dim(\ker f^p)$.
   D'après le lemme des noyaux, puisque Q et X^p sont premiers entre eux, nous avons $\ker(Q(f)f^p) = \ker(f^p) \oplus \ker(Q(f))$ et puisque $Q(f)f^p = 0$, le noyau de $Q(f)f^p$ est l'espace E tout entier donc
   $$E = \ker(f^p) \oplus \ker(Q(f)).$$
   On en déduit que $n = \dim(\ker f^p) + \dim \ker(Q(f))$ et donc $\dim(\ker Q(f)) = n - \dim(\ker f^p)$. Puisque $\ker(Q(f))$ et $\operatorname{Im} f^p$ sont de même dimension et comme $\operatorname{Im} f^p) \subset \ker Q(f)$, nous avons $\operatorname{Im} f^p) = \ker Q(f)$. On en déduit alors que
   $$E = \ker(f^p) \oplus \ker(Q(f)) = \ker(f^p) \oplus \operatorname{Im}(f^p).$$