Algèbre linéaire M31 - Devoir Surveillé N° 1

—

VENDREDI 9 NOVEMBRE 2017, DURÉE 2 HEURES

Aucun document n'est autorisé, les calculatrices sont interdites, les téléphones portables sont éteints et rangés. Inscrivez votre numéro de groupe sur la copie

Exercice 1. Soit e_1, e_2, e_3 la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie pour $u = (x, y, z)$ par

$$f(u) = (x + y + z, 2x - y - z, 4x + y + z).$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer $f(e_1)$, $f(e_2)$, et $f(e_3)$.
3. Déterminer une base et la dimension du noyau de f.
4. Quel est le rang de f ?
5. Déterminer une base de l'image de f.

Exercice 2. Soit A la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Montrer que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 3. Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 3 & 7 & 4 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

1. Décomposer σ en produit de cycles à supports disjoints.
2. Décomposer σ en produit de transpositions.
3. Donner la signature de σ.
4. Calculer σ^{2018}.

Exercice 4. Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On note $Id : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application identité. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$u(e_1) = \frac{1}{9}(4e_1 - 7e_2 + 4e_3), \quad u(e_2) = \frac{1}{9}(-e_1 + 4e_2 + 8e_3), \quad u(e_3) = \frac{1}{9}(-8e_1 - 4e_2 + e_3).$$

1. Soit $f = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in \mathbb{R}^3$. Calculer $u(f)$.
2. Donner la matrice M de u dans la base canonique.
3. Déterminer une base de $E = \ker(u - Id)$.
4. Montrer que $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ -2x + 2y + z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et donner une base de F.

Tourner la page s'il vous plaît

5. Montrer que pour tout $b \in F$, on a $u^2(b) = -b$.
6. A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}^3$? Justifier.
7. Soit a un vecteur non nul de E et b un vecteur non nul de F (on ne choisira pas des vecteurs particuliers). Montrer que $(a, b, u(b))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
8. Donner la matrice N de u dans la base $(a, b, u(b))$.
9. Soit $a = (-2, 2, 1)$ et $b = (1, 1, 0)$. Vérifier que a appartient à E et que b appartient à F. Donner la matrice de passage P de la base canonique à la base $(a, b, u(b))$. Quel lien y a-t-il entre P, M et N ?