Algèbre linéaire M31

—

CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ N° 1

Exercice 1. Soit e_1, e_2, e_3 la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie pour $u = (x, y, z)$ par

$$f(u) = (x + y + z, 2x - y - z, 4x + y + z).$$

1. Soit $u = (x, y, z), v = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour établir la linéarité de f, nous devons montrer que $f(u + \lambda v) = f(u) + \lambda f(v)$. Nous avons $u + \lambda v = (x + \lambda x', y + \lambda y', z + \lambda z')$ et

$$\begin{aligned} f(u + \lambda v) &= \big((x + \lambda x') + (y + \lambda y') + (z + \lambda z'), 2(x + \lambda x') - (y + \lambda y') - (z + \lambda z'), \\ &\quad 4(x + \lambda x') + (y + \lambda y') + (z + \lambda z')\big) \\ &= \big((x + y + z) + \lambda(x' + y' + z'), (2x - y - z) + \lambda(2x' - y' - z'), \\ &\quad (4x + y + z) + \lambda(4x' + y' + z')\big) \\ &= (x + y + z, 2x - y - z, 4x + y + z) + \lambda(x' + y' + z', 2x' - y' - z', 4x' + y' + z') \\ &= f(u) + \lambda f(v). \end{aligned}$$

   Ainsi f est bien linéaire.

2. Puisque $e_1 = (1, 0, 0)$, il vient :

$$f(e_1) = (1, 2, 4) = e_1 + 2e_2 + 4e_3.$$

   De même :

$$\begin{aligned} f(e_2) &= (1, -1, 1) = e_1 - e_2 + e_3, \\ f(e_3) &= (1, -1, 1) = e_1 - e_2 + e_3. \end{aligned}$$

3. On détermine $\ker f$. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Nous avons les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} u \in \ker f &\Leftrightarrow f(u) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z &= 0 \\ 2x - y - z &= 0 \\ 4x + y + z &= 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z &= 0 & \\ 3x &= 0 & L_2 + L_1 \\ 3x &= 0 & L_3 - L_1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y &= -z \\ x &= 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow u = z(0, -1, 1). \end{aligned}$$

   Ainsi, $\ker f = \text{vect}\{(0, -1, 1)\}$. Comme $(0, -1, 1) \neq \vec{0}$, $(0, -1, 1)$ est une base de $\ker f$ et $\dim \ker f = 1$.

4. D'après le théorème du rang, on a $\dim \mathbb{R}^3 = \text{rg}(f) + \dim \ker f$ d'où $\text{rg}(f) = 3 - 1 = 2$.

5. Puisque f est de rang 2, $\dim\ \mathrm{Im}\ f = 2$ et pour déterminer une base de $\mathrm{Im}\ f$, il suffit de trouver deux vecteurs libres dans $\mathrm{Im}\ f$. Les vecteurs $f(e_1)$ et $f(e_2)$ sont des vecteurs de $\mathrm{Im}\ f$, linéairement indépendants puisque

$$\begin{aligned} \alpha f(e_1) + \beta f(e_2) = \vec{0} &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{rl} \alpha + \beta & = 0 \\ 2\alpha - \beta & = 0 \\ 4\alpha + \beta & = 0 \end{array} \right. \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{rll} \alpha + \beta & = 0 & \\ 3\alpha & = 0 & L_2 + L_1 \\ 3\alpha & = 0 & L_3 - L_1 \end{array} \right. \\ &\Rightarrow \alpha = \beta = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $f(e_1)$, $f(e_2)$ est une base de $\mathrm{Im}\ f$.

Exercice 2. On montre que A est inversible et on calcule son inverse en résolvant l'équation $A(x, y, z) = (a, b, c)$ d'inconnue (x, y, z) et où (a, b, c) sont des paramètres.

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrl} 2x & +2y & -z & = a \\ -x & +2y & +2z & = b \\ 2x & -y & +2z & = c \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrlrrl} 2x & +2y & -z & = a & & & \\ 3x & +6y & & = 2a & +b & & L_2 + 2L_1 \\ 3x & -3y & & = & -b & +c & L_3 - L_2 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrlrrl} 2x & +2y & -z & = a & & & \\ 3x & +6y & & = 2a & +b & & \\ & -9y & & = -2a & -2b & +c & L_3 - L_2 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrlrrl} 2x & +2y & -z & = a & & & \\ 3x & +6y & & = 2a & +b & & \\ & -9y & & = -2a & -2b & +c & L_3 - L_2 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} z & = -a + \frac{2}{9}(2a - b + 2c) + \frac{2}{9}(2a + 2b - c) = \frac{1}{9}(-a + 2b + 2c) \\ x & = \frac{1}{3}\big(2a + b - \frac{6}{9}(2a + 2b - c)\big) = \frac{1}{9}(2a - b + 2c) \\ y & = \frac{1}{9}(2a + 2b - c) \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, l'équation $A(x, y, z) = (a, b, c)$ a pour unique solution $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, cela montre que A est inversible et que $A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 3. Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 3 & 7 & 2 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

1. La décomposition de σ en produit de cycles à supports disjoints est
$$\sigma = (1\ 8\ 6)(2\ 5\ 4\ 7).$$
2. La décomposition de σ en produit de transpositions est :
$$\sigma = (1\ 8)(8\ 6)(2\ 5)(5\ 4)(4\ 7).$$
3. Comme σ est le produit de 5 transpositions et qu'une transposition est de signature -1, on en déduit que la signature de σ est $(-1)^5$ soit -1.

4. Puisque deux cycles à supports disjoints commutent, il vient

$$\sigma^{2018} = (1\ 8\ 6)^{2018}(2\ 5\ 4\ 7)^{2018}.$$

Un cycle de longueur p étant d'ordre p, $(1\ 8\ 6)^3 = Id$. Comme $2018 = 3 \times 672 + 2$, on en déduit que

$$\begin{aligned}(1\ 8\ 6)^{2018} &= \left((1\ 8\ 6)^3\right)^{672}(1\ 8\ 6)^2\\ &= (1\ 8\ 6)^2\\ &= (1\ 6\ 8).\end{aligned}$$

De même, comme $2018 = 504 \times 4 + 2$, on en déduit

$$\begin{aligned}(2\ 5\ 4\ 7)^{2018} &= \left((2\ 5\ 4\ 7)^4\right)^{504}(2\ 5\ 4\ 7)^2\\ &= (2\ 5\ 4\ 7)^2\\ &= (2\ 4)(5\ 7).\end{aligned}$$

On obtient finalement :

$$\sigma^{2018} = (1\ 6\ 8)(2\ 4)(5\ 7).$$

Exercice 4.

1. Soit $f = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in \mathbb{R}^3$. Puisque u est linéaire, il vient

$$\begin{aligned}u(f) &= u(xe_1 + ye_2 + ze_3)\\ &= xu(e_1) + yu(e_2) + zu(e_3)\\ &= x\frac{1}{9}(4e_1 - 7e_2 + 4e_3) + y\frac{1}{9}(-e_1 + 4e_2 + 8e_3) + z\frac{1}{9}(-8e_1 - 4e_2 + e_3)\\ &= \frac{1}{9}(4x - y - 8z)e_1 + \frac{1}{9}(-7x + 4y - 4z)e_2 + \frac{1}{9}(4x + 8y + 1z)e_3.\end{aligned}$$

2. Puisque $u(e_1) = \frac{1}{9}(4e_1 - 7e_2 + 4e_3)$, $\quad u(e_2) = \frac{1}{9}(-e_1 + 4e_2 + 8e_3)$, $\quad u(e_3) = \frac{1}{9}(-8e_1 - 4e_2 + e_3)$, on a

$$M = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & -1 & -8\\ -7 & 4 & -4\\ 4 & 8 & 1\end{pmatrix}.$$

3. Soit $f = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in \mathbb{R}^3$. Nous avons les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}f \in \ker(u - Id) &\Leftrightarrow u(f) - f = 0\\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} -5x - y - 8z &= 0\\ -7x - 5y - 4z &= 0\\ 4x + 8y - 8z &= 0\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rll} -5x - y - 8z &= 0 & \\ 18x + 36z &= 0 & L_2 - 5L_1\\ -36x - 72z &= 0 & L_3 + 8L_1\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} -5x - y - 8z &= 0\\ x = -2z & \end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} y &= 2z\\ x &= -2z\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow u = z(-2, 2, 1).\end{aligned}$$

Ainsi, le vecteur $-2e_1 + 2e_2 + e_3$ est une base de E.

4. Nous allons montrer que F est un sous-espace vectoriel et en déterminer une base en même temps. Soit $f = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in \mathbb{R}^3$. Nous avons les équivalences suivantes :
$$\begin{aligned} f \in F &\Leftrightarrow -2x + 2y + z = 0 \\ &\Leftrightarrow z = 2x - 2y \\ &\Leftrightarrow f = xe_1 + ye_2 + (2x - 2y)e_3 \\ &\Leftrightarrow f = x(e_1 + 2e_3) + y(e_2 - 2e_3) \\ &\Leftrightarrow f \in \operatorname{vect}\big(e_1 + 2e_3, e_2 - 2e_3\big). \end{aligned}$$
Ainsi, F est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $e_1 + 2e_3$ et $e_2 - 2e_3$. En particulier, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. De plus, $e_1 + 2e_3$ et $e_2 - 2e_3$. est une famille génératrice de F. Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha(e_1 + 2e_3) + \beta(e_2 - 2e_3) = \vec{0}$ implique $\alpha e_1 + \beta e_2 + (2\alpha - 2\beta)e_3 = \vec{0}$ et puisque e_1, e_2, e_3 est une base de $\mathbb{R}^3$, il vient $\alpha = \beta = 0$. Par conséquent $e_1 + 2e_3$ et $e_2 - 2e_3$ est une famille libre et c'est donc une base de F.
5. On calcule $u^2(e_1 + 2e_3)$ et $u^2(e_1 + 2e_3)$:
$$\begin{aligned} u(e_1 + 2e_3) &= \frac{1}{9}(-12e_1 - 15e_2 + 6e_3) \\ u^2(e_1 + 2e_3) &= \frac{1}{81}((-48 + 15 - 48)e_1 + (-84 + 60 + 24)e_2 + (-48 - 120 + 6)e_3) \\ &= -(e_1 + 2e_3) \\ u(e_2 - 2e_3) &= \frac{1}{9}(15e_1 + 12e_2 + 6e_3) \\ u^2(e_1 + 2e_3) &= \frac{1}{81}((60 - 12 - 48)e_1 + (-105 + 48 - 24)e_2 + (60 + 96 + 6)e_3) \\ &= -(e_2 - 2e_3) \end{aligned}$$
Comme $e_1 + 2e_3$ et $e_2 - 2e_3$ est une base de F et comme u et l'application $-Id$ sur F coïncident sur cette base, on en déduit qu'elles sont égales sur F, autrement dit $u^2(b) = -b$ pour tout $b \in F$.
6. Puisque $\dim E = 1$ et $\dim F = 2$, pour que $E \oplus F = \mathbb{R}^3$ il faut et il suffit que $E \cap F = \{\vec{0}\}$. Soit $f \in E \cap F$.
Puisque f appartient à F, il existe α et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que $f = \alpha(e_1 + 2e_3) + \beta(e_2 - 2e_3)$.
Puisque f appartient à E, nous avons $u(f) - f = \vec{0}$. On en déduit que $u(f) = f$ et $u^2(f) = u(f) = f$.
D'autre part, puisque f appartient à F, $u^2(f) = -f$. Ainsi, $f = -f$ et nécessairement $f = \vec{0}$.
Ainsi $E \cap F = \{\vec{0}\}$ et $E \oplus F = \mathbb{R}^3$.
7. Soit a un vecteur non nul de E et b un vecteur non nul de F. Puisque a est non nul, appartient à E et puisque E est de dimension 1, a est une base de E. Si nous montrons que $(b, u(b))$ est une base de F, puisque E et F sont en somme directe dans $\mathbb{R}^3$, alors $(a, b, u(b))$ sera une base de $\mathbb{R}^3$ car la réunion des bases de sous-espaces en somme directe dans un espace vectoriel est une base de cet espace vectoriel.
Comme F est de dimension 2, pour montrer que $(b, u(b))$ est une base de F, il suffit de montrer que $(b, u(b))$ est une famille libre. Soit donc $x, y \in \mathbb{R}$ tel que $xb + yu(b) = \vec{0}$.
Puisque $u^2(b) = -b$ pour tout $b \in F$, il vient
$$\begin{aligned} \vec{0} &= u(xb + yu(b)) \\ &= xu(b) - yb. \end{aligned}$$
Nous avons alors l'implication suivante :
$$\begin{cases} xb + yu(b) &= \vec{0} \\ xu(b) - yb &= \vec{0} \end{cases} \Rightarrow (x^2 + y^2)b = \vec{0} \qquad xL_1 - yL_2$$
Puisque b est non nul, on en déduit que $x^2 + y^2 = 0$. Mais la somme de nombres positifs $(x^2, y^2 \geqslant 0)$ ne peut être nulle que si chacun des nombres est nul, donc $x = y = 0$. Ainsi $(b, u(b))$ est une famille libre de F et c'est donc une base de F.
On en conclut finalement que $(a, b, u(b))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

8. Puisque $u(a) = a$, $u(b) = u(b)$ et $u(u(b)) = u^2(b) = -b$, on a
$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

9. Le vecteur $a = (-2, 2, 1)$ est le vecteur que nous avons donné comme base de E donc a appartient à E.
Nous avons $-2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 0 = 0$ donc b appartient à F. Calculons $u(b)$:
$$\begin{aligned} u(b) &= \frac{1}{9}(4-1)e_1 + \frac{1}{9}(-7+4)e_2 + \frac{1}{9}(4+8)e_3 \\ &= \frac{1}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 + \frac{4}{3}e_3. \end{aligned}$$
Par définition P est la matrice
$$P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 1 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$
De plus, nous avons $M = PNP^{-1}$.