Université de Lille 1 SCIENCES ET TECHNOLOGIES

L2 Informatique

2017/2018

Algèbre linéaire M31 - Devoir Surveillé N° 1

—

VENDREDI 10 NOVEMBRE 2017, DURÉE 2 HEURES

Aucun document n'est autorisé, les calculatrices sont interdites, les téléphones portables sont éteints et rangés. Inscrivez votre numéro de groupe sur la copie

Exercice 1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique e_1, e_2, e_3 de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que les vecteurs
$$e'_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3, \quad e'_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3, \quad e'_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$$
forment une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner P, la matrice de passage de e_1, e_2, e_3 à e'_1, e'_2, e'_3 et calculer son inverse.
3. Calculer la matrice de f par rapport à la base e'_1, e'_2, e'_3.

Exercice 2. Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Décomposer σ en produit de cycles à supports disjoints.
2. Décomposer σ en produit de transpositions.
3. Donner la signature de σ.
4. Calculer σ^{2017}.

Exercice 3. Calculer les déterminants suivants $D_1 = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 13 \\ 0 & -1 & -16 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ et $D_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

Exercice 4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $M = \begin{pmatrix} 5 & \alpha & 0 \\ 0 & 5 & \alpha \\ \alpha & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $\det(M)$.
2. Calculer le rang de M suivant les valeurs de α.

Exercice 5. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n et u un endomorphisme de E tel que $u \circ u = -Id$ où Id est l'endomorphisme identité sur E.

1. Calculer $(\det u)^2$ en fonction de n. En déduire que u est bijectif et que n est paire.

On suppose à partir de maintenant que $\dim E = 4$.

2. On suppose que les 3 vecteurs $x_1, u(x_1), x_2$ sont linéairement indépendants. Montrer que les 4 vecteurs $x_1, u(x_1), x_2, u(x_2)$ sont linéairement indépendants.
3. On suppose que E possède une base de la forme $x_1, u(x_1), x_2, u(x_2)$. Donner la matrice de u dans cette base.