---

**Algèbre linéaire M31**

—

CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ N° 1

---

## Exercice 1.

1. Comme $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ et que $e'_1, e'_2, e'_3$ est une famille de 3 vecteurs, il suffit de montrer que c'est une famille libre. Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$. Nous avons les implications suivantes :

$$
\begin{aligned}
xe'_1 + ye'_2 + ze'_3 = 0 &\Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y+z &=& 0 \\ 3x+4y+2z &=& 0 \\ x+y+2z &=& 0 \end{array}\right. \\
&\Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl|l} 2x+3y+z &=& 0 & L_1 \\ -x-2y &=& 0 & L_2-2L_1 \\ -3x-5y &=& 0 & L_3-2L_1 \end{array}\right. \\
&\Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl|l} 2x+3y+z &=& 0 & L_1 \\ -x-2y &=& 0 & L_2 \\ y &=& 0 & L_3-3L_2 \end{array}\right. \\
&\Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} z &=& 0 \\ x &=& 0 \\ y &=& 0 \end{array}\right.
\end{aligned}
$$

Par conséquent $e'_1, e'_2, e'_3$ est une famille libre de 3 vecteurs et donc une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Nous avons $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculons l'inverse de $P$ :

$$
\begin{aligned}
P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y+z &=& a \\ 3x+4y+2z &=& b \\ x+y+2z &=& c \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl|l} 2x+3y+z &=& a & L_1 \\ -x-2y &=& -2a+b & L_2-2L_1 \\ -3x-5y &=& -2a+c & L_3-2L_1 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl|l} 2x+3y+z &=& a & L_1 \\ -x-2y &=& -2a+b & L_2 \\ y &=& 4a-3b+c & L_3-3L_2 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -2(4a-3b+c)+2a-b = -6a+5b-2c \\ y &=& 4a-3b+c \\ z &=& a-2(-6a+5b-2c)-3(4a-3b+c) = a-b+c \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Nous en déduisons que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (remarquons que ce seul calcul permettaient d'affirmer que $e'_1, e'_2, e'_3$ est une base de $\mathbb{R}^3$).

3. Soit $A'$ la matrice $f$ par rapport à la base $e'_1, e'_2, e'_3$. Alors

$$\begin{aligned} A' &= P^{-1}AP \\ &= \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4 & 6 & -42 \\ 3 & -3 & 27 \\ 1 & -1 & 8 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Exercice 2.**

1. Nous avons :

$$\sigma = (13625)(47).$$

2. Nous avons :

$$\sigma = (13)(36)(62)(25)(47).$$

3. La signature de $\sigma$ est $(-1)^5 = -1$
4. Puisque $(13625)$ et $(47)$ sont deux cycles à support disjoints ils commutent et donc

$$\sigma^{2017} = (13625)^{2017}(47)^{2017}.$$

Comme $(13625)$ est un cycle de longueur 5, $(13625)^5 = Id$ donc

$$\begin{aligned} (13625)^{2017} &= (13625)^2 \\ &= (16532). \end{aligned}$$

Nous avons aussi $(47)^{2017} = (47)$ car une transposition est d'ordre 2. Ainsi

$$\sigma^{2017} = (16532)(47).$$

**Exercice 3.** Le déterminant d'une matrice triangulaire étant égale au produit des éléments sur la diagonale, nous avons

$$D_1 = -10.$$

Ensuite

$$\begin{aligned}
D_2 &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ L_4 - L_1 \end{matrix} \\
&= - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 - L_1 \end{matrix} \\
&= - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -1.
\end{aligned}$$

**Exercice 4.**

1. Nous n'allons pas développer $M$ directement car on obtiendrait un polynôme de degré 3 en $\alpha$ et nous ne pourrions pas savoir quelles sont ses racines. Nous allons d'abord travailler sur ses lignes et ses colonnes.

$$\begin{aligned}
\det M &= \begin{vmatrix} 5 & \alpha & 0 \\ 0 & 5 & \alpha \\ \alpha & 0 & 5 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 5+\alpha & 5+\alpha & 5+\alpha \\ 0 & 5 & \alpha \\ \alpha & 0 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 + L_2 + L_3 \\ \\ \\ \end{matrix} \\
&= (5+\alpha) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & \alpha \\ \alpha & 0 & 5 \end{vmatrix} \\
&= (5+\alpha) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & \alpha \\ \alpha & -\alpha & 5-\alpha \end{vmatrix} \\
&= (5+\alpha) \begin{vmatrix} 5 & \alpha \\ -\alpha & 5-\alpha \end{vmatrix} \\
&= (5+\alpha)\big(5(5-\alpha) + \alpha^2\big) \\
&= (5+\alpha)(\alpha^2 - 5\alpha + 25)
\end{aligned}$$

2. Si $\alpha \neq -5$, $\det M \neq 0$ car $\alpha^2 - 5\alpha + 25 \neq 0$ quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Ainsi, si $\alpha \neq -5$, $M$ est inversible et donc $\operatorname{rg}(M) = 3$.

Calculons le rang de $M$ lorsque $\alpha = -5$ :

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(M) &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 5 & -5 & 0 \\ 0 & 5 & -5 \\ -5 & 0 & 5 \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -5 \\ -5 & 0 & 5 \end{pmatrix} L_1 + L_2 + L_3 \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= 2.
\end{aligned}$$

Ainsi, si $\alpha = -5$, $\mathrm{rg}(M) = 2$.

**Exercice 5.**

1. Puisque $u \circ u = -Id$, nous avons $\det(u \circ u) = \det(-Id) = (-1)^n$.
   D'autre part, $\det(u \circ u) = (\det(u))^2$.
   On en déduit donc que $(\det u)^2 = (-1)^n$.
   Puisque le carré d'un nombre réel est toujours positif, cela implique que $(-1)^n > 0$ et donc $n$ est paire et $\det u = 1$ ou $-1$. Par suite $\det u \neq 0$ et $u$ est bijective.
2. Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
   Si $d \neq 0$, nous avons

$$\begin{aligned}
ax_1 + bu(x_1) + cx_2 + du(x_2) = \vec{0} &\Rightarrow \begin{cases} ax_1 + bu(x_1) + cx_2 + du(x_2) = \vec{0} \\ u\big(ax_1 + bu(x_1) + cx_2 + du(x_2)\big) = \vec{0} \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} ax_1 + bu(x_1) + cx_2 + du(x_2) = \vec{0} \\ -bx_1 + au(x_1) - dx_2 + cu(x_2) = \vec{0} \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} ax_1 + bu(x_1) + cx_2 + du(x_2) = \vec{0} \\ (-a\frac{c}{d} - b)x_1 + (a - b\frac{c}{d})u(x_1) + (-d - c\frac{c}{d})x_2 = \vec{0} \quad L_2 - \frac{c}{d}L_1 \end{cases}
\end{aligned}$$

   Puisque $x_1, u(x_1), x_2$ est une famille libre, on en déduit que

$$\begin{cases} a\frac{c}{d} + b = 0 \\ a - b\frac{c}{d} = 0 \\ -d - c\frac{c}{d} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\frac{c}{d} + b = 0 \\ a - b\frac{c}{d} = 0 \\ d^2 + c^2 = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow d = c = a = b = 0$$

   ce qui est absurde. Donc $d = 0$.
   Puisque $d = 0$, $ax_1 + bu(x_1) + cx_2 + du(x_2) = \vec{0}$ s'écrit en fait $ax_1 + bu(x_1) + cx_2 = \vec{0}$.
   Puisque $x_1, u(x_1), x_2$ est une famille libre cela implique $a = b = c = 0$ et finalement on a $a = b = c = d = 0$.
   Ainsi, $x_1, u(x_1), x_2, u(x_2)$ sont linéairement indépendants.
3. Nous avons $u^2(x_1) = -x_1$, et $u^2(x_2) = -x_2$. Par conséquent, la matrice de $u$ dans la base $x_1, u(x_1), x_2$, $u(x_2)$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$