Université Lille 1 **2017/2018**
L2 Informatique

Algèbre linéaire M31 - Examen de rattrapage

–

14 JUIN 2018 - DURÉE 2 HEURES

Aucun document n'est autorisé, les calculatrices sont interdites, les téléphones portables sont éteints et rangés. Inscrivez votre numéro de groupe sur la copie

Exercice 1 On considère le système d'équations suivant, d'inconnues réelles x, y et z, dépendant du paramètre réel m :

$$(S_m) : \begin{cases} 3mx + 2y - 2z & = & 1 \\ -mx + my + z & = & m \\ mx + y + mz & = & 1 \end{cases}$$

1. Donner une interprétation matricielle/vectorielle de ce système.
2. Pour quelles valeurs de m le système (S_m) admet-il une unique solution ?
3. Déterminer cette solution pour les valeurs de m trouvées à la question précédente.

Exercice 2 Soit $n \geq 3$ un entier et soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le noyau de f et le rang de f.
2. Donner la définition d'une valeur propre d'un endomorphisme.
3. En utilisant la définition d'une valeur propre, montrer que λ est une valeur propre non nulle de f si et seulement si $\lambda^2 - \lambda - (n-1) = 0$ (on ne cherchera pas à calculer ici le polynôme caractéristique de f). En déduire l'ensemble des valeurs propres de f.
4. Quel est le polynôme caractéristique de f ? Justifier.
5. Quel est le polynôme minimal de f ? Justifier.
6. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Justifier.

Exercice 3 Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A. Justifier que A n'est pas diagonalisable.
2. Déterminer $\ker(A - I)^2$.
3. Déterminer une matrice T triangulaire supérieure de la forme $T = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ et une matrice P inversible telle que $A = PTP^{-1}$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer A^n.