Chapitre 3
–
RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES

Le but de ce chapitre est, étant donné un endomorphisme f sur un espace vectoriel E, de trouver une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale ou triangulaire. Nous noterons E un espace vectoriel de dimension n sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Valeurs propres, vecteurs propres et diagonalisation

Définition 1.0.1 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

— $v \in E$ non nul est un vecteur propre de f si il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que

$$f(v) = \lambda v.$$

— $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de f s'il existe un vecteur propre associé à λ.

— Le sous-espace propre associé à la valeur propre λ est $\ker(f - \lambda Id) = \{v \in E,\ f(v) = \lambda v\}$.

On a les définitions équivalents pour une matrice.

Exemple 1.0.2
1. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Alors $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre -1.
2. Soit $n \geq 1$ et $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ définie par $\varphi(P) = P'$. Alors 0 est la seule valeur propre de φ.

Proposition 1.0.3 Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Les assertions sont équivalentes
1. $\ker(f - \lambda Id)$ est un sous-espace vectoriel de E et λ est une valeur propre de f,
2. $\ker(f - \lambda Id) \neq \{\vec{0}\}$,
3. $\dim \ker(f - \lambda Id) \neq 0$

Définition 1.0.4 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On appelle multiplicité géométrique de la valeur propre λ de f le nombre $\dim \ker(f - \lambda Id)$.

Exemple 1.0.5 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{K}))$ définie pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par $f(M) = AM$. Alors 1 est valeur propre de f de multiplicité géométrique 2.

Définition 1.0.6 On dit que $f \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable s'il existe une base de E telle la matrice de f dans cette base soit une matrice diagonale.
On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable s'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible telle que $D = P^{-1}AP$ soit diagonale.

Théorème 1.0.7 Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de E formée de vecteurs propres pour f.

Preuve : Si f est diagonalisable, alors la base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale est une base de vecteur propre.
Réciproquement, si E a une base $e_1, \ldots, e_n$ constituée de vecteurs propres de f, alors pour tout j, $f(e_j) = \lambda_j e_j$ et donc la matrice A de f dans la base $e_1, \ldots, e_n$ est $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$. $\square$
Pour diagonaliser une matrice, il faut donc trouver une base constituée de vecteurs propres.

Théorème 1.0.8 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ admettant m valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ et soient $x_1, \ldots,$ x_m des vecteurs propres associés respectivement à $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$.
Alors la famille $x_1, \ldots, x_m$ est libre.

Preuve : On raisonne par récurrence sur le nombre m de vecteurs propres.
Si $m = 1$, x_1 étant un vecteur propre, il est non nul et donc libre.
Supposons le résultat établi pour $m - 1$ vecteurs propres. Soient $x_1, \ldots,$ x_m des vecteurs propres associés respectivement à $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ et soit $\mu_1, \ldots, \mu_m \in \mathbb{K}$ tels que

$$\mu_1 x_1 + \ldots + \mu_m x_m = \vec{0}.$$

Alors

$$\lambda_m \mu_1 x_1 + \ldots + \lambda_m \mu_m x_m = \vec{0}.$$

D'autre part

$$f(\mu_1 x_1 + \ldots + \mu_m x_m) = \vec{0}$$

et

$$\mu_1 \lambda_m x_1 + \ldots + \mu_m \lambda_m x_m = \vec{0}.$$

On en déduit alors que

$$(\lambda_m - \lambda_1)\mu_1 x_1 + \ldots + (\lambda_m - \lambda_{m-1})\mu_{m-1} x_{m-1} = \vec{0}.$$

D'après l'hypothèse de récurrence, $x_1, \ldots, x_{m-1}$ est une famille libre donc $(\lambda_m - \lambda_1)\mu_1 = \ldots = (\lambda_m - \lambda_{m-1})\mu_{m-1} = 0$.
Comme le $\lambda_m \neq \lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}$, on a nécessairement $\mu_1 = \ldots = \mu_{m-1} = 0$. On en déduit alors que $\mu_m x_m = 0$ et donc puisque $x_m \neq 0$, $\mu_m = 0$.
Ainsi, $\mu_1, \ldots, \mu_m = 0$ et la famille $x_1, \ldots, x_m$ est libre.
On déduit par récurrence la proposition. $\square$

Corollaire 1.0.9 Si $\dim E = n$, un endomorphisme a au plus n valeurs propres.

Preuve : En effet, si un endomorphisme avait strictement plus de n valeurs propres, il existerait une famille libre de cardinal strictement plus grand que la dimension de E. $\square$

Corollaire 1.0.10 Si $f \in \mathcal{L}(E)$ a m valeurs propres deux à deux distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, alors la somme $\ker(f - \lambda_1 Id) + \ldots + \ker(f - \lambda_m Id)$ est directe.

Preuve : Soit x_j dans $\ker(f - \lambda_j Id)$, $j = 1, \ldots, m$ tels que $x_1 + \ldots + x_m \neq \vec{0}$. On doit alors montrer que $x_1 = \ldots = x_m = \vec{0}$.
Si tous les x_j ne sont pas nuls, quitte à "éliminer" ceux qui sont nuls, on peut supposer que tous les x_j sont non nuls. Mais alors $x_1, \ldots, x_m$ est une famille libre et on ne peut pas avoir $x_1 + \ldots + x_m \neq \vec{0}$.
Donc tous les x_j sont nuls et la somme est directe. $\square$

Théorème 1.0.11 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ admettant n valeurs propres 2 à 2 distinctes. Alors f est diagonalisable.

Preuve : Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ désignent les n valeurs propres deux à deux distinctes de f et soit $x_1 \in \ker(f - \lambda_1 Id), \dots, x_n \in \ker(f - \lambda_1 Id)$. Alors $x_1, \dots, x_n$ est une famille libre de n vecteurs et $\dim E = n$. C'est donc une base de E et f est diagonalisable. □

Exemple 1.0.12 Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, sachant que 0, 1 et 2 sont des valeurs propres de A.

Théorème 1.0.13 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors f est diagonalisable si et seulement si il existe des valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ de f telles que

$$E = \ker(f - \lambda_1 Id) \oplus \dots \oplus \ker(f - \lambda_l Id).$$

Preuve : Supposons que f est diagonalisable. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ les valeurs propres de f. La somme $\ker(f - \lambda_1 Id) + \dots + \ker(f - \lambda_l Id)$ est directe (indépendamment du fait que f est diagonalisable). Pour montrer que $E = \ker(f - \lambda_1 Id) \oplus \dots \oplus \ker(f - \lambda_l Id)$, il suffit de montrer que $\dim E \leq \dim \ker(f - \lambda_1 Id) + \dots + \dim \ker(f - \lambda_l Id)$.
Soit $\mathcal{B}$ une base de vecteur propre de f. Parmi les vecteurs de $\mathcal{B}$, on note $\mathcal{B}_1$ les vecteurs propres relatifs à la valeur propre $\lambda_1, \dots, \mathcal{B}_l$ les vecteurs propres relatifs à la valeur propre λ_l. Alors $\mathcal{B}_1$ est une famille libre de $\ker(f - \lambda_1 Id)$ et card $\mathcal{B}_1 \leq \dim \ker(\mathrm{f} - \lambda_1 \mathrm{Id})$. De même pour les autres sous-espaces propres. On en déduit :

$$\dim E = \text{card } \mathcal{B} = \text{card } \mathcal{B}_1 + \dots + \text{card } \mathcal{B}_\mathrm{l} \leq \dim \ker(\mathrm{f} - \lambda_1 \mathrm{Id}) + \dots \dim \ker(\mathrm{f} - \lambda_\mathrm{l} \mathrm{Id}).$$

Réciproquement, si

$$E = \ker(f - \lambda_1 Id) \oplus \dots \oplus \ker(f - \lambda_l Id),$$

donnons nous $\mathcal{B}_1$ une base de $\ker(f - \lambda_1 Id)$, ..., $\mathcal{B}_l$ une base de $\ker(f - \lambda_l Id)$. Alors $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_l$ est une base de E et dans cette base, f est diagonale. □

Exemple 1.0.14 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Sachant que les valeurs propres de A sont -2 et 1, diagonaliser A.

Nos objectifs maintenant : avoir un moyen pratique de déterminer les valeurs propres et avoir des critères de diagonalisation dans les autres cas que celui du théorème précédent.

2 Valeurs propres et polynôme caractéristique

Définition 2.0.1 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle polynôme caractéristique de A et on note P_A le déterminant

$$P_A(X) = \det(A - XI_n).$$

Si f est un endomorphisme de E, on appelle polynôme caractéristique de f et on note P_f le polynôme caractéristique de la matrice de f dans une base de E.

Exemple 2.0.2 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Alors

$$\begin{aligned} P_f(X) &= (1 - X)(2 - X) - 6 \\ &= X^2 - 3X - 4 \\ &= (-1 - X)(4 - X) \end{aligned}$$

Remarquons que P_f ne dépend pas de la base choisie puisque si A et B représentent f dans deux bases différentes, il existe P inversible telle que $A = PBP^{-1}$ et donc

$$\begin{aligned}\det(A - XI_n) &= \det(PBP^{-1} - XI_n)\\ &= \det(P(B - XI_n)P^{-1})\\ &= \det(B - XI_n).\end{aligned}$$

Ainsi le polynôme d'un endomorphisme est bien défini.

Proposition 2.0.3 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de f si et seulement si $P_f(\lambda) = 0$.

Preuve : Si λ est une valeur propre de f, alors il existe $v \in E$ non nul tel que $f(v) = \lambda v$ donc $(f - \lambda Id)(v) = \vec{0}$. Par conséquent, $\ker(f - \lambda Id) \neq \{\vec{0}\}$ et f n'est pas inversible donc $\det(f - \lambda Id) = 0$, d'où $P_f(\lambda) = 0$.
Réciproquement, si $P_f(\lambda) = 0$, $\det(f - \lambda Id) = 0$ donc f n'est pas inversible donc $\ker(f - \lambda Id) \neq \{\vec{0}\}$ et il existe $v \in E$ non nul tel que $f(v) = \lambda v$: λ est une valeur propre de f. □

3 Polynôme caractéristique et diagonalisation

Définition 3.0.1 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que λ est une racine d'ordre $k \geq 1$ si $P(\lambda) = P'(\lambda) = \ldots = P^{k-1}(\lambda) = 0$ et $P^k(\lambda) \neq 0$.

Proposition 3.0.2 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $P(\lambda) = 0$. Alors λ est une racine d'ordre $k \geq 1$ de P si et seulement s'l existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(X) = (X - \lambda)^k Q(X)$ et $Q(\lambda) \neq 0$.

Définition 3.0.3 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On appelle multiplicité algébrique de la valeur propre λ de f la multiplicité de λ comme racine de P_f.

Exemple 3.0.4 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Alors -1 et 4 sont des valeurs propres de f de multiplicité algébrique 1.

Définition 3.0.5 Soit A une matrice. On appelle trace de A et on note tr (A) la somme des éléments de la diagonale de A : si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, tr $(A) = a_{11} + \ldots + a_{nn}$.

Proposition 3.0.6 Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le polynôme caractéristique de A est un polynôme de degré n et

$$P_A(X) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} \mathrm{tr}\ (A) X^{n-1} + \ldots + \det A.$$

Preuve : Lorsqu'on développe $\det(A - XI_n)$, on obtient immédiatement que P_A est un polynôme.
De plus le coefficient de degré n de P_A provient du terme $(a_{11} - X) \ldots (a_{nn} - X)$ du développement de $\det(A - XI_n)$. Ainsi le coefficient de X^n est $(-1)^n$. Remarquons encore que tous les autres termes du développement de $\det(A - XI_n)$ sont de degré au plus $n - 2$. Ainsi le coefficient du terme de degré $n - 1$ est aussi apporté par le produit $(a_{11} - X) \ldots (a_{nn} - X)$ et vaut donc $(-1)^{n-1}(a_{11} + \ldots + a_{nn}) = (-1)^{n-1}\mathrm{tr}\ (A)$.
Enfin, $P_A(0) = \det A$ donc le terme constant est $\det A$. □

Exemple 3.0.7 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Alors

$$P_f(X) = X^2 - 3X - 4$$

et tr $A = 3$, $\det A = -4$.

Remarquons que si A et B représentent l'endomorphisme f dans deux bases distinctes de E, alors $P_A = P_B$, donc en particulier, tr $(A) =$ tr (B). Cela justifie la définition suivante :

Définition 3.0.8 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}^n)$ une matrice qui représente f dans une base donnée de E. On appelle trace de f et on note tr (f) la trace de A. La trace de f ne dépend pas du choix de la base de E.

Proposition 3.0.9 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Le polynôme caractéristique de f est un polynôme de degré n et

$$P_f(X) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1}\text{tr }(f)X^{n-1} + \ldots + \det f.$$

Théorème 3.0.10 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ valeur propre de multiplicité algébrique k. Alors

$$1 \leq \dim \ker(f - \lambda Id) \leq k.$$

Autrement dit :

$$1 \leq \text{ multiplicité géométrique de } \lambda \leq \text{ multiplicité algébrique de } \lambda.$$

Preuve : On note l la multiplicité géométrique de λ. Puisque λ est une valeur propre de f, il existe $v \neq 0$ tel que $f(v) = \lambda v$. Ainsi v appartient à $\ker(f - \lambda Id)$ et v est une famille libre de $\ker(f - \lambda Id)$ donc $l \geq 1$
Soit $v_1, \ldots, v_l$ est une famille libre de $\ker(f-\lambda Id)$ que l'on complète en une base $v_1, \ldots, v_l, e_{l+1}, \ldots, e_n$ de E. Dans la base $v_1, \ldots, v_l, e_{l+1}, \ldots, e_n$, f a une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda I_l & A' \\ O & A'' \end{pmatrix}$$

Alors en calculant $\det(f - \lambda Id)$ dans la base $v_1, \ldots, v_l, e_{l+1}, \ldots, e_n$, on a :

$$\begin{aligned} \det(f - \lambda Id) &= \begin{vmatrix} (\lambda - X)I_l & A' \\ O & A'' - XId_{n-l} \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - X)^l \det(A'' - XI_{n-l}). \end{aligned}$$

Ainsi $(\lambda - X)^l$ divise P_f et P_f s'écrit $P_f(X) = (X - \lambda)^l R(X)$. Mais puisque λ est une racine d'ordre k de P_f, il existe un polynôme Q tel que $Q(\lambda) \neq 0$ et $P_f(X) = (X - \lambda)^k Q(X)$. Si nous avions $k < l$, alors $(X - \lambda)^{l-k} R(X) = Q(X)$ et donc $Q(\lambda) = 0$, ce qui est absurde. Donc nécessairement $l \leq k$. □

Théorème 3.0.11 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors f est diagonalisable si et seulement si

(i) P_f a $n(= \dim E)$ racines (distinctes ou confondues) dans $\mathbb{K}$ (si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, c'est toujours vérifié, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il faut que toutes les racines soient réelles),

(ii) Pour toute valeur propre de f, la multiplicité algébrique est égale à multiplicité géométrique .

(ii') Pour toute racine λ_j de P_f d'ordre k_j, $\dim \ker(f - \lambda_j Id) = k_j$.

Preuve : Les points (ii) et (ii') sont juste une reformulation l'un de l'autre. Notons

1. $\lambda_1, \ldots, \lambda_l \in \mathbb{K}$ les l valeurs propres deux à deux distinctes de f,
2. pour tout j, notons k_j la multiplicité algébrique de λ_j,
3. pour tout j, notons o_j la multiplicité géométrique (=$\dim \ker(f - \lambda_j Id)$),
4. pour tout j, $v_1^{(j)}, \ldots, v_{o_j}^{(j)}$ une base de $\ker(f - \lambda_j Id)$.

On suppose que les conditions (i) et (ii) sont vérifiées. La condition (i) implique que $P_f(X) = (\lambda_1 - X)^{k_1} \ldots (\lambda_l - X)^{k_l}$ tandis que la condition (ii) implique que pour tout j, $o_j = k_j$ et $o_1 + \ldots + o_l = k_1 + \ldots + k_l = \deg P_f = n$.

Puisque la somme $\ker(f-\lambda_1 Id)+\ldots+\ker(f-\lambda_l Id)$ est directe, $v_1^{(1)},\ldots,v_{o_1}^{(1)},\ldots,v_1^{(l)},\ldots,v_{o_l}^{(l)}$ est une base de $\ker(f-\lambda_1 Id)+\ldots+\ker(f-\lambda_l Id)$ et donc une famille libre de E qui comporte $o_1+\ldots+o_l = n = \dim E$ éléments, c'est donc une base de E et f est diagonalisable.

Réciproquement, supposons que E a une base $\mathcal{B}$ de vecteurs propres de f. Notons p_j le nombre de vecteurs de $\mathcal{B}$ relatif à la valeur propre λ_j. Alors $n = p_1+\ldots+p_l$.
Comme les vecteurs de $\mathcal{B}$ relatifs à λ_j forment une famille libre de $\ker(f-\lambda_j Id)$, on a $p_j \leq o_j$.
Ainsi $n = p_1+\ldots+p_l \leq o_1+\ldots+o_l \leq k_1+\ldots+k_l \leq n$ d'où

$$o_1+\ldots+o_l = k_1+\ldots+k_l = n$$

Cependant, si (i) n'était pas vérifiée alors $k_1+\ldots+k_l < \deg P_f = n$ ce qui est absurde.
Si (ii) n'était pas vérifiée, alors pour un j, $o_j < k_j$ et donc $o_1+\ldots+o_l < k_1+\ldots+k_l \leq n$ ce qui est absurde. $\square$

Pour diagonaliser une matrice, un endomorphisme :

i) On calcule et on factorise le polynôme caractéristique,

ii) On détermine une base de tous les sous-espaces propres,

iii) Si la somme des dimensions des sous-espaces propres égale la dimension de l'espace, la matrice ou l'endomorphisme est diagonalisable et la réunion des bases des sous-espaces propres est une base l'espace formée de vecteurs propres.

Exemple 3.0.12 Diagonaliser si possible la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
On détermine le polynôme caractéristique de A : $P_A(X) = -(X-1)(X+2)^2$ mais $\dim\ker(f+2Id) = 1$ donc A n'est pas diagonalisable.

4 Trigonalisation

Définition 4.0.1 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est trigonalisable s'il existe une matrice P inversible et une matrice triangulaire supérieure telle que

$$A = PTP^{-1}.$$

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est trigonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure.

Théorème 4.0.2 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que toutes les racines du polynôme caractéristique P_f de f ait toutes ses racines dans $\mathbb{K}$. Alors f est trigonalisable.

Preuve : Si toutes les racines de P_f sont dans $\mathbb{K}$, f a au moins une valeur propre λ.

On va raisonner par récurrence sur n et montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tout espace vectoriel E de dimension n et tout $f \in \mathcal{L}(E)$, f est trigonalisable.

Si $n = 1$, il n'y a rien à faire car puisque que f a une valeur propre et que $\dim E = 1$, f est diagonalisable donc trigonalisable.

Supposons le résultat démontré au rang $n-1$. Soit λ une valeur propre de f et e_1 un vecteur propre non nul associé.
On complète e_1 en une base $e_1, e'_2, \ldots, e'_n$ de E et on note $E' = \langle e'_2, \ldots, e'_n \rangle$. La matrice A de f dans la base $e_1, e'_2, \ldots, e'_n$ est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

où A' est une matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$.
Soit alors

$$\pi : \begin{cases} E & \longrightarrow & E' \\ x = x_1e_1 + x'_2e'_2 + \ldots + x'_ne'_n & \longmapsto & \pi(x) = x'_2e'_2 + \ldots + x'_ne'_n \end{cases},$$

la projection sur E' parallèlement à E. Alors π est linéaire et $f' = \pi \circ f$ est un endomorphisme de E'. La matrice de f' dans la base $e'_2, \ldots, e'_n$ est alors A' et donc

$$\det(A - XI_n) = (\lambda - X)\det(A' - XI_{n-1}).$$

On en déduit alors que $P_A(X) = (\lambda - X)P_{A'}(X)$ et donc que les $n-1$ racines de A' appartiennent à $\mathbb{K}$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à f' : il existe une base $e_2, \ldots, e_n$ de E' dans laquelle la matrice de f' est triangulaire supérieure, i.e. pour tout $j \geq 2$, $f'(e_j) = \alpha_2^{(j)}e_2 + \ldots + \alpha_j^{(j)}e_j$. Ainsi, pour tout $i \geq 2$, $f(e_j) = \alpha_1^{(j)}e_1 + \alpha_2^{(j)}e_2 + \ldots + \alpha_j^{(j)}e_j$ et donc, dans la base $e_1, \ldots, e_n$, la matrice de f est triangulaire supérieure. $\square$

5 Polynômes et endomorphismes

5.1 Rappel d'algèbre polynômiale

Théorème 5.1.1 Soient A et B deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Il existe un unique couple (Q, R) de polynômes tels que

(i) $\deg(R) < \deg(B)$,

(ii) $A = BQ + R$

Le polynôme Q est appelé quotient et R est appelé reste de la division euclidienne de A par B.

Définition 5.1.2 Soient A et B dans $\mathbb{K}[X]$. On dit que B divise A s'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ$.

Définition 5.1.3 Deux polynômes $A, B \in \mathbb{K}[X]$ sont dits premiers entre eux si les seuls polynômes de $\mathbb{K}[X]$ qui divisent A et B sont les polynômes constants.

Théorème 5.1.4 (de Bézout) Deux polynômes A et B de $\mathbb{K}[X]$ sont premiers entre eux si et seulement si il existe U et V dans $\mathbb{K}[X]$ tels que

$$AU + BV = 1.$$

5.2 Polynômes d'un endomorphisme

Définition 5.2.1 Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P(X) = p_kX^k + \ldots + p_1X + p_0$. On définit l'endomorphisme $P(f)$ en posant

$$P(f) = p_kf^k + \ldots + p_1f + p_0Id,$$

où $f^j = f \circ f \circ \ldots \circ f$ est l'endomorphisme f composé j fois avec lui même et par convention, $f^0 = Id$. Si A est une matrice carrée de taille n, on pose

$$P(A) = p_kA^k + \ldots + p_1A + p_0I_n.$$

Proposition 5.2.2 Soient $f \in \mathcal{L}(E)$, $P(X) = p_kX^k + \ldots + p_1X + p_0$ et $Q(X) = q_lx^l + \ldots + q_0$. Alors

$$Q(f) \circ P(f) = P(f) \circ Q(f) = (PQ)(f) = (QP)(f).$$

Preuve : Pour $j \geq l$ on pose $q_j = 0$ et pour $j \geq k$, on pose $p_j = 0$. Alors

$$\begin{aligned}
P(f) \circ Q(f) &= (p_k f^k + \ldots + p_1 f + p_0 Id)(q_k f^k + \ldots + q_0 Id) \\
&= \sum_{j=0}^{k+l} \sum_{i=0}^{j} p_i q_{j-i} f^i \circ f^{j-i} \\
&= \sum_{j=0}^{k+l} \left(\sum_{i=0}^{j} p_i q_j \right) f^j \\
&= (PQ)(f).
\end{aligned}$$

Comme $PQ = QP$, il vient $P(f) \circ Q(f) = (PQ)(f) = (QP)(f) = Q(f) \circ P(f)$. $\square$

Lemme 5.2.3 (des noyaux) Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ deux polynômes premiers entre eux et $f \in \mathbb{K}[X]$. Alors

$$\ker(PQ)(f) = \ker(P(f)) \oplus \ker((Q(f))).$$

Preuve : On commence par montrer que la somme est directe : D'après le théorème de Bézout, il existe U et $V \in \mathbb{K}[X]$ tels que

$$UP + VQ = 1.$$

On en déduit alors que

$$U(f) \circ P(f) + V(f) \circ Q(f) = Id.$$

Ainsi, si v appartient à $\ker P(f) \cap \ker Q(f)$, il vient

$$v = U(f) \circ P(f)(v) + V(f) \circ Q(f)(v) = \vec{0}.$$

Donc la somme est directe. Pour tout vecteur $v \in E$ nous avons :

$$v = U(f) \circ P(f)(v) + V(f) \circ Q(f)(v).$$

Mais si v appartient à $\ker(PQ)(f)$, alors $U(f) \circ P(f)(v)$ appartient à $\ker(Q(f))$ puisque $Q(f) \circ U(f) \circ P(f)(v) = U(f) \circ (PQ)(f)(v) = \vec{0}$. De même $V(f) \circ Q(f)(v)$ appartient à $\ker(P(f))$ donc $\ker(PQ)(f) = \ker(P(f)) \oplus \ker((Q(f)))$. $\square$

5.3 Polynômes annulateurs

Définition 5.3.1 On dit que $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme annulateur de $f \in \mathcal{L}(E)$ (respectivement de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) si $P(f) = 0$ (respectivement P(A)=0).

Le théorème suivant nous assure l'existence des polynômes annulateurs (même s'il y a plus simple !) :

Théorème 5.3.2 (Théorème de Caley-Hamilton) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et P_f son polynôme caractéristique. Alors $P_f(f) = 0$.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et P_A son polynôme caractéristique. Alors $P_A(A) = 0$.

Preuve : On suppose dans un premier temps que toutes les valeurs propres de f appartiennent à $\mathbb{K}$, i.e. $P_f(X) = (\lambda_1 - X) \ldots (\lambda_n - X)$ (les λ_j ne sont pas supposées distinctes) ; c'est toujours le cas si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
On raisonne par récurrence, le cas $n = 1$ étant trivial puisque dans ce cas, la matrice A de f est $A = (a)$, $P_f(X) = P_A(X) = a - X$ et donc $P_f(f) = 0$.
Supposons le résultat démontré au rang $n - 1$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de f et e_1 le vecteur propre associé. On complète e_1 en une base $e_1, e_2, \ldots, e_n$ de E. Soient $E' = \langle e_2, \ldots, e_n \rangle$ et

$$\pi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E' \\ x = x_1 e_1 + x'_2 e'_2 + \ldots + x'_n e'_n & \longmapsto & \pi(x) = x'_2 e'_2 + \ldots + x'_n e'_n \end{array} \right. .$$

la projection sur E' parallèlement à E. Alors π est linéaire et $f' = \pi \circ f$ est un endomorphisme de E'. Par hypothèse de récurrence, $P_{f'}(f') = 0$, autrement dit, pour tout $v \in E'$, $P_{f'}(f')(v) = \vec{0}$. De plus, comme dans le théorème de trigonalisation $P_f(X) = (\lambda - X)P_{f'}(X)$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, nous avons

$$\begin{aligned} f^k \circ (\lambda Id - f)(e_1) &= f^k(\lambda e_1 - \lambda e_1) \\ &= f^k(\vec{0}) \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

et bien entendu

$$(\lambda Id - f)(e_1) = \vec{0}.$$

On en déduit que

$$P_f(f)(e_1) = P_{f'}(f)(\lambda Id - f)(e_1) = \vec{0}.$$

Si v appartient à E', on a $f(v) = \alpha e_1 + \pi \circ f(v) = \alpha e_1 + f'(v)$ où α appartient à $\mathbb{K}$ et dépend de v. Puisque $(\lambda Id - f)(e_1) = 0$, on en déduit alors

$$(\lambda Id - f) \circ f(v) = (\lambda Id - f) \circ f'(v).$$

Supposons avoir montré que pour tout vecteur $v \in E'$, $(\lambda Id - f) \circ f^k(v) = (\lambda Id - f) \circ {f'}^k(v)$. Il vient alors

$$\begin{aligned} (\lambda Id - f) \circ f^{k+1}(v) &= f \circ (\lambda Id - f) \circ f^k(v) \\ &= f \circ (\lambda Id - f)({f'}^k(v)) \\ &= (\lambda Id - f) f({f'}^k(v)) \\ &= (\lambda Id - f){f'}^{k+1}(v) \text{ car } f'(v) \text{ appartient à } E'. \end{aligned}$$

On en déduit par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $(\lambda Id - f) \circ f^k(v) = (\lambda Id - f) \circ {f'}^k(v)$. Cela implique que pour tout polynôme P et tout vecteur $v \in E'$, $(\lambda Id - f) \circ P(f)(v) = (\lambda Id - f) \circ P(f')(v)$. En particulier, pour $P = P_{f'}$, cela donne

$$\begin{aligned} P_f(f)(v) &= (\lambda Id - f) \circ P_{f'}(f)(v) \\ &= (\lambda Id - f) \circ P_{f'}(f')(v) \\ &= \vec{0}. \end{aligned}$$

Ainsi, puisque tout $v \in E$, s'écrit sous la forme $v = \beta e_1 + v'$ avec $v' \in E'$, on a

$$\begin{aligned} P_f(f)(v) &= \beta P_f(f)(e_1) + P_f(f)(v') \\ &= \vec{0}. \end{aligned}$$

Ainsi $P_f(f) = 0$. Si maintenant $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors la matrice A de f dans une base donnée de E est une matrice à coefficient dans $\mathbb{R}$ donc dans $\mathbb{C}$. Ainsi, d'après ce que l'on vient de faire, $P_A(A) = 0$ et donc $P_f(f) = 0$. □

5.4 Polynôme minimal

Proposition 5.4.1 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que

(i) Q est unitaire,

(ii) $Q(f) = 0$,

(iii) Si $P \in \mathbb{K}[X]$ est tel que $P(f) = 0$ alors Q divise P.

Définition 5.4.2 Le polynôme Q donné par la proposition précédente est appelé polynôme minimal de f. On le notera μ_f.

Preuve de la proposition 5.4.1 : Considérons $I = \{P \in \mathbb{K}[X] / \ P(f) = 0\}$. Alors I est non vide puisque P_f est un polynôme qui annule f. Soit Q un polynôme non nul de I de degré minimal. Quitte à diviser Q par le coefficient de son terme de plus haut degré, on peut supposer que Q est unitaire et donc que Q vérifie (i) et (ii).
Soit P un polynôme annulateur de f. On effectue la division euclidienne de P par Q. Alors

$$P = AQ + R$$

avec $\deg R < \deg Q$. De plus

$$\begin{aligned} P(f) &= A(f) \circ Q(f) + R(f) \\ &= R(f). \end{aligned}$$

On en déduit que $R(f) = 0$ et donc R annule f. Comme R annule f et $\deg R < \deg Q$, on en déduit que $R = 0$ et donc que Q divise P. $\square$

Proposition 5.4.3 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors λ est une valeur propre de f si et seulement si $\mu_f(\lambda) = 0$.

Preuve : Soit λ est une valeur propre de f. Soit $F = \ker(f - \lambda Id)$. Ce sous-espace est f-stable puisque si v appartient à F, $(f - \lambda Id)(f(v)) = f \circ (f - \lambda Id)(v) = \vec{0}$ et $f(v)$ appartient encore à F.
On peut donc considérer $f|_F : F \to F$ la restriction de f à F. Comme $(f|_F - \lambda Id) = 0$, $X - \lambda$ est le polynôme minimal de $f|_F$.
D'autre part, μ_f est un polynôme qui annule $f|_F$ donc $(X - \lambda)$ divise μ_f et par conséquent $\mu_f(\lambda) = 0$.
Réciproquement, si $\mu_f(\lambda) = 0$, puisque μ_f divise P_f, $P_f(\lambda) = 0$ donc λ est une valeur propre de f. $\square$

Théorème 5.4.4 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors f est diagonalisable si et seulement si toutes les racines de μ_f sont dans $\mathbb{K}$ et sont simples.

Preuve : Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ les valeurs propres 2 à 2 distinctes de f.
Supposons f diagonalisable et posons

$$Q(X) = (X - \lambda_1) \ldots (X - \lambda_k).$$

Alors pour tout vecteur propre v associé à la valeur propre λ_j, on a

$$\begin{aligned} Q(f)(v) &= (f - \lambda_1 Id) \ldots (f - \lambda_k Id)(v) \\ &= (f - \lambda_1 Id) \ldots (f - \lambda_{j-1} Id)(f - \lambda_{j+1} Id) \ldots (f - \lambda_k Id)(f - \lambda_j Id)(v) \\ &= (f - \lambda_1 Id) \ldots (f - \lambda_{j-1} Id)(f - \lambda_{j+1} Id) \ldots (f - \lambda_k Id)(\lambda_j v - \lambda_j v) \\ &= \vec{0}. \end{aligned}$$

Puisque E a une base de vecteurs propres pour f, on en déduit que $Q(f) = 0$ et donc que Q annule f. Mais toutes les valeurs propres étant distinctes et étant racine de μ_f, on en déduit que $\deg \mu_f \geq k = \deg Q$. Ainsi, $Q = \mu_f$ et par suite μ_f est scindé et toutes ses racines sont simples.
Réciproquement, si μ_f est scindé et a toutes ses racines simples. Alors puisque toutes les valeurs propres sont racines de μ_f et puisque toutes les racines de μ_f sont valeurs propres de f, il vient :

$$\mu_f(X) = (X - \lambda_1) \ldots (X - \lambda_k).$$

Les λ_j étant deux à deux distincts, les polynômes $(X - \lambda_1)$ et $(X - \lambda_2) \ldots (X - \lambda_k)$ sont premiers entre eux et d'après le lemme des noyaux :

$$E = \ker(\mu_f(f)) = \ker(f - \lambda_1 Id) \oplus \ker\big((f - \lambda_2 Id) \circ \ldots \circ (f - \lambda_k Id)\big).$$

Or, toujours d'après le lemme des noyaux,

$$\ker\big((f-\lambda_2 Id)\circ\ldots\circ(f-\lambda_k Id)\big)=\ker(f-\lambda_2 Id)\oplus\ker\big((f-\lambda_3 Id)\circ\ldots\circ(f-\lambda_k Id)\big)$$

et il vient

$$E=\ker(\mu_f(f))=\ker(f-\lambda_1 Id)\oplus\ker(f-\lambda_2 Id)\oplus\ker\big((f-\lambda_3 Id)\circ\ldots\circ(f-\lambda_k Id)\big).$$

En réitérant, il vient

$$E=\ker(f-\lambda_1 Id)\oplus\ker(f-\lambda_2 Id)\oplus\ldots\oplus\ker(f-\lambda_k Id).$$

Ainsi, f est diagonalisable. $\square$

Corollaire 5.4.5 Soit $f\in\mathcal{L}(E)$. Alors f est diagonalisable si et seulement si il existe un polynôme annulateur de f dont toutes les racines sont simples et appartiennent à $\mathbb{K}$.

Preuve : Si f est diagonalisable alors le polynôme minimal μ_f de f est un polynôme annulateur de f dont toutes les racines sont simples et appartiennent à $\mathbb{K}$.
Réciproquement, si P est un polynôme annulateur de f dont toutes les racines sont dans $\mathbb{K}$ et sont simples, alors puisque μ_f divise P, toutes les racines de μ_f sont dans $\mathbb{K}$ (l'ensemble des racines de μ_f est inclus dans l'ensemble des racine de P) et sont d'ordre 1 (une racine λ de μ_f est d'ordre inférieur ou égal à l'ordre de λ en tant que racine de P) et donc f est diagonalisable. $\square$

6 Diagonalisation simultanée

6.1 Sous-espaces stables par un endomorphisme

Définition 6.1.1 Soit F un sous-espace vectoriel de E, $f\in\mathcal{L}(E)$. On dit que F stable par f ou f-stable si pour tout $v\in F$, $f(v)$ appartient encore à F.

Proposition 6.1.2 Si F est un sous-espace vectoriel stable par $f\in\mathcal{L}(E)$ alors pour tout polynôme $P\in\mathbb{K}[X]$, F est stable par $P(f)$.

Preuve : Par récurrence, on montre que $f^k(v)$ appartient à F pour tout $v\in F$. Ainsi, si $P(X)=p_kX^k+\ldots+p_0$, $P(f)(v)=p_kf^k(v)+\ldots+p_0v$ appartient à F quel que soit $v\in F$. $\square$

Proposition 6.1.3 Soit $f,g\in\mathcal{L}(E)$ tels que $f\circ g=g\circ f$. Alors $\ker f$ et $\mathrm{Im}\ f$ sont stables par g.

Preuve : Soit $v\in\ker f$. Alors $f\circ g(v)=g\circ f(v)=g(\vec{0})=\vec{0}$ donc $g(v)$ appartient à $\ker f$.
Soit $v\in\mathrm{Im}\ f$. Par définition de $\mathrm{Im}\ f$, il existe $u\in E$ tel que $v=f(u)$. Alors $g(v)=g\circ f(u)=f(g(u))$ donc $g(v)$ appartient à $\mathrm{Im}\ f$. $\square$

Proposition 6.1.4 Soit F un sous espace vectoriel de E stable par $f\in\mathcal{L}(E)$. Soit $f|_F$ la restriction de f à F Alors $P_{f|_F}$ divise P_f. Si de plus G est un supplémentaire de F stable par f, alors

$$P_f=P_{f|_F}\cdot P_{f|_G}.$$

Preuve : Soit $e_1,\ldots,e_k$ une base de F que l'on complète en une base $e_1,\ldots,e_n$ de E. Alors, puisque F est f-stable, dans cette base, f a pour matrice

$$M=\begin{pmatrix}A & B\\ O & C\end{pmatrix},$$

où O est une matrice dont tous les coefficients sont nuls. Alors

$$P_f(X)=\det(A-XId_k)\det(C-XId_{n-k}).$$

Mais $P_{f|_F}(X) = \det(A - XId_k)$ donc $P_{f|_F}$ divise P_f.
Si G est un supplémentaire de F stable par f, on se donne une base $e_{k+1}, \ldots, e_n$ de G. Alors $e_1, \ldots, e_n$ est une base de E et, puisque F et G sont f-stables, dans cette base, f a pour matrice

$$M = \begin{pmatrix} A & O \\ O' & B \end{pmatrix},$$

où O et O' sont des matrices dont tous les coefficients sont nuls. Alors

$$P_f(X) = \det(A - XId_k)\det(B - XId_{n-k}).$$

Mais $P_{f|_F}(X) = \det(A - XId_k)$ et $P_{f|_G}(X) = \det(B - XId_k)$, donc $P_f = P_{f|_F} \cdot P_{f|_G}$. $\square$

6.2 Sous-espaces stables et diagonalisation

Théorème 6.2.1 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable et F un sous espace vectoriel f-stable. Alors $f|_F$, la restriction de f à F, est diagonalisable sur F.

Preuve : Soit μ_f le polynôme minimal de f comme endomorphisme de E. Alors toutes les racines de μ_f appartiennent à $\mathbb{K}$ et sont d'ordre 1. De plus, μ_f est un polynôme annulateur de f et donc de $f|_F$. Par conséquent, $f|_F$ est diagonalisable d'après le corollaire 5.4.5. $\square$

Proposition 6.2.2 Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ deux endomorphismes diagonalisables tels que $f \circ g = g \circ f$. Alors il existe une base de E constituée de vecteurs propres de f et g.

Preuve : Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ les valeurs propres de f. Alors puisque f est diagonalisable :

$$E = \ker(f - \lambda_1 Id) \oplus \ldots \oplus \ker(f - \lambda_1 Id).$$

Comme f et g commutent, pour tout j, $\ker(f - \lambda_j Id)$ est g-stable et donc la restriction de g à $\ker(f - \lambda_j Id)$ est diagonalisable. Soit B_j une base de $\ker(f - \lambda_j Id)$ constituée de vecteurs propres de g. Alors tous les vecteurs de B_j sont des vecteurs propres de f associés à la valeur propre λ_j.
Ainsi, la réunion des B_j donne une base de E formée de vecteurs propres de f et g. $\square$

7 Décomposition de Dunford

Définition 7.0.1 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est nilpotent s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $f^k = 0$.

Proposition 7.0.2 Si $f \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent, la seule valeur propre de f est 0 et $P_f(X) = (-1)^n X^n$.

Preuve : Soit λ une valeur propre de f et v un vecteur propre non nul associé. On montre par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f^k(v) = \lambda^k v$.
C'est vrai pour $k = 1$ par définition d'une valeur propre. Si $f^k(v) = \lambda^k v$ alors

$$\begin{aligned} f^{k+1}(v) &= f(f^k(v)) \\ &= f(\lambda^k v) \\ &= \lambda^k f(v) \\ &= \lambda^k \lambda v = \lambda^{k+1} v. \end{aligned}$$

Par récurrence, nous avons donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^k(v) = \lambda^k v$.
Nous en déduisons pour $k = n$ que $f^n(v) = \lambda^n v = 0$. Comme $v \neq 0$, nécessairement $f(v) = 0$.
Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, f a n valeurs propres nécessairement nulle donc $P_f(X) = (-1)^n X^n$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on regarde une matrice A de f dans une base de E. Comme A est à coefficients réels donc complexes, $P_A(X) = (-1)^n X^n$ d'où $P_f(X) = (-1)^n X^n$. $\square$

Définition 7.0.3 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, λ une valeur propre de f, m sa multiplicité algébrique. Le sous-espace $\ker(f - \lambda Id)^m$ est appelé sous-espace caractéristique de f pour la valeur propre λ.

Proposition 7.0.4 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $P_f(X) = (\lambda_1 - X)^{k_1} \dots (\lambda_m - x)^{k_m}$ où tous les λ_j sont dans $\mathbb{K}$. Alors

(i) pour tout j

$$\{\vec{0}\} =: \ker(f - \lambda_j Id)^0 \subset \ker(f - \lambda_j Id) \subset \dots \subset \ker(f - \lambda_j Id)^{k_j} = \ker(f - \lambda_j Id)^{k_j+1}.$$

(ii) $E = \ker(f - \lambda_1)^{k_1} \oplus \dots \oplus \ker(f - \lambda_m)^{k_m}$,

(iii) $\dim \ker(f - \lambda_j)^{k_j} = k_j$.

Preuve :

(i) En effet, si v appartient à $\ker(f - \lambda_j Id)^k$, alors

$$\begin{aligned}(f - \lambda_j Id)^{k+1}(v) &= (f - \lambda_j Id)(f - \lambda_j Id)^k(v)\\ &= (f - \lambda_j Id)(\vec{0}) = \vec{0}\end{aligned}$$

Donc v appartient à $\ker(f - \lambda_j Id)^{k+1}(v)$

(ii) Puisque les valeurs propres sont deux à deux distinctes, $(X - \lambda_j Id)^{k_1}$ est premier avec $(X - \lambda_2)^{k_2} \dots (X - \lambda_m)^{k_m}$ et donc

$$\ker P_f(f) = \ker(f - \lambda_1)^{k_1} \oplus \ker\left((f - \lambda_2 Id)^{k_2} \dots (f - \lambda_m)^{k_m}\right).$$

De même,

$$\ker\left((f - \lambda_2 Id)^{k_2} \dots (f - \lambda_m)^{k_m}\right) = \ker\left((f - \lambda_2 Id)^{k_2}\right) \oplus \ker\left((f - \lambda_3 Id)^{k_3} \dots (f - \lambda_m)^{k_m}\right)$$

et donc

$$\ker P_f(f) = \ker(f - \lambda_1)^{k_1} \oplus \ker\left((f - \lambda_2 Id)^{k_2}\right) \oplus \ker\left((f - \lambda_3 Id)^{k_3} \dots (f - \lambda_m)^{k_m}\right).$$

En réitérant, on obtient

$$\ker P_f(f) = \ker(f - \lambda_1)^{k_1} \oplus \dots \oplus \ker(f - \lambda_m)^{k_m}.$$

D'après le théorème de Caley-Hamilton, $\ker P_f(f) = E$.

(iii) Notons n_j la dimension de $\ker(f - \lambda_j)^{k_j}$. Pour tout j, comme $\ker(f - \lambda_j)^{k_j}$ est stable par f, on peut considérer $g_j \in \mathcal{L}(\ker(f - \lambda_j)^{k_j})$, la restriction de f à $\ker(f - \lambda_j)^{k_j}$. Par définition $g_j \in \mathcal{L}(\ker(f - \lambda_j)^{k_j})$ est définie par $g_j(v) = f(v)$ pour tout $v \in \ker(f - \lambda_j)^{k_j}$. Alors on a

$$P_f = P_{g_1} P_{f|_{\ker\left((f - \lambda_2 Id)^{k_2} \dots (f - \lambda_m)^{k_m}\right)}}.$$

En réitérant, il vient

$$P_f = P_{g_1} P_{g_2} \dots P_{g_k}.$$

Déterminons P_{g_j}. Pour tout j, $g_j = f|_{\ker(f - \lambda_j)^{k_j}}$ ne peut avoir que pour valeur propre λ_j. En effet, si μ est une valeur propre de g_j et $v \in \ker(f - \lambda_j Id)^{k_j}$ est un vecteur propre associé, alors

$$\begin{aligned}(g_j - \lambda_j Id)(v) &= \mu v - \lambda_j v\\ &= (\mu - \lambda_j)v.\end{aligned}$$

Ainsi, $\mu - \lambda_j$ est une valeur propre de $g_j - \lambda_j Id$. Mais $g_j - \lambda_j Id$ est nilpotent, sa seule valeur propre est 0 et donc $\mu = \lambda_j$. Ainsi, nous avons $P_{g_j} = (X - \lambda_j Id)^{n_j}$. Nous en déduisons alors que

$$P_f = (X - \lambda_1 Id)^{n_1} \dots (X - \lambda_m Id)^{n_m} = (X - \lambda_1 Id)^{k_1} \dots (X - \lambda_m Id)^{k_m}.$$

Nous en déduisons que pour tout j, $n_j = k_j$. $\square$

Théorème 7.0.5 (Décomposition de Dunford) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que P_f ait toutes ses racines dans $\mathbb{K}$. Alors il existe un unique couple (n, d) d'endomorphismes avec n nilpotent et d diagonalisable tels que

(i) $f = d + n$,

(ii) $n \circ d = d \circ n$.

Preuve : Raisonnons par analyse-synthèse. Supposons l'existence de n et d. Remarquons tout d'abord, si n et d existe alors f commute avec d et avec n. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{K}$ les valeurs propres de f respectivement de multiplicité $k_1, \ldots, k_m$.

$$E = \ker(f - \lambda_1)^{k_1} \oplus \ldots \oplus \ker(f - \lambda_m)^{k_m}.$$

Comme d et n commutent avec f, pour tout j, $\ker(f - \lambda_j)^{k_j}$ est stable par d et par n. Considérons f_j, d_j et n_j les restrictions de f, d et n à $\ker(f - \lambda_j)^{k_j}$. La seule valeur propre de f_j est λ_j. De plus, comme d commute avec
Comme d est diagonalisable, d_j l'est aussi. Soit λ une valeur propre de d_j et v un vecteur propre associé.
D'autre part, $f_j - \lambda_j Id$ et $n_j =$ commutent et sont tout deux nilpotents donc $f_j - \lambda_j Id - n_j = d_j - \lambda_j Id$ est nilpotent. Par conséquent, $d_j - \lambda_j Id$ est un endomorphisme nilpotent. De plus, puisque d_j est diagonalisable et comme $\lambda_j Id$ est diagonale, donc $d_j - \lambda_j Id$ est nilpotent. Mais le seul endomorphisme diagonalisable et nilpotent est l'endomorphisme nul, donc $d_j = \lambda_j Id$ et $n_j = f_j - \lambda_j Id$ et de plus, n_j et d_j commutent.
Cela définit donc complètement et univoquement les deux endomorphismes d et n sur $\ker(f - \lambda_j)^{k_j}$ et comme E est la somme directe des sous-espaces caractéristiques de f, cela définit n et d de manière unique sur E. Comme les restrictions de n et d à chacun des sous-espace caractéristique commutent, n et d commutent. $\square$

Exemple 7.0.6 Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A et déterminer les valeurs propres de A.
2. Déterminer une base des sous-espaces propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable.
3. Déterminer les sous-espaces caractéristiques de A.
4. Déterminer une matrice P inversible et une matrice triangulaire supérieure telle que $A = PTP^{-1}$.
5. Déterminer le polynôme minimal de A.

1. Calcul du polynôme caractéristique de A :

$$\begin{aligned}
P_A(X) &= \begin{vmatrix} 2-X & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1-X & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -X & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-X & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 2-X \end{vmatrix} \\
&= (2-X)(1-X) \begin{vmatrix} 2-X & -1 & 1 \\ 1 & -X & 1 \\ 1 & -1 & 2-X \end{vmatrix} \\
&= (2-X)(1-X) \begin{vmatrix} 1-X & -1 & 1 \\ 1-X & -X & 1 \\ 0 & -1 & 2-X \end{vmatrix} \\
&= (2-X)(1-X)^2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -X & 1 \\ 0 & -1 & 2-X \end{vmatrix} \\
&= (2-X)(1-X)^2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -X & 0 \\ 0 & -1 & 2-X \end{vmatrix} \\
&= (2-X)^2(1-X)^2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -X \end{vmatrix} \\
&= (2-X)^2(1-X)^3
\end{aligned}$$

   Les valeurs propres de A sont donc 1 et 2.

2. Soit $v = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) \in \mathbb{R}^5$.

$$\begin{aligned}
v \in \ker(A - Id) &\Leftrightarrow \begin{cases} v_1 + v_2 - v_3 + v_5 &= 0 \\ v_1 + v_2 - v_3 - v_4 + v_5 &= 0 \\ v_4 &= 0 \\ v_1 - v_3 + v_5 &= 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} v_1 - v_3 + v_5 &= 0 \\ v_4 &= 0 \\ v_2 &= 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow v = \begin{pmatrix} v_3 - v_5 \\ 0 \\ v_3 \\ 0 \\ v_5 \end{pmatrix} = v_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v_5 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

   Ainsi $e_1 = (1, 0, 1, 0, 0)$ et $e_2 = (-1, 0, 0, 0, 1)$ est une base de $\ker(A - Id)$ qui est donc de dimension 2. Comme 2, la multiplicité géométrique de la valeur propre 1, est strictement inférieure à 3, la multiplicité algébrique de 1, A n'est pas diagonalisable.

Soit $v=(v_1,v_2,v_3,v_4,v_5)\in\mathbb{R}^5$.

$$v\in\ker(A-2Id)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{cr} v_2-v_3+v_5 & =0\\ v_2 & =0\\ v_1+v_2-2v_3-v_4+v_5 & =0\\ v_1-v_3 & =0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} v_5=v_3\\ v_2=0\\ v_4=0\\ v_1=v_3\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow v=\begin{pmatrix}v_3\\0\\v_3\\0\\v_3\end{pmatrix}=v_3\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Ainsi, $e_3=(1,0,1,0,1)$ est une base de $\ker(A-2Id)$.

3. On calcule

$$(A-Id)^2=\begin{pmatrix}1&0&-1&1&1\\0&0&0&0&0\\1&0&-1&1&1\\0&0&0&1&0\\1&0&-1&1&1\end{pmatrix}$$

ce qui donne :

$$v\in\ker(A-Id)^2\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{cr} v_1-v_3+v_4+v_5 & =0\\ v_4 & =0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} v_1=v_3-v_5\\ v_4=\ \ 0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow v=\begin{pmatrix}v_3-v_5\\v_2\\v_3\\0\\v_5\end{pmatrix}=v_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+v_3\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+v_5\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Ainsi $e_1=(1,0,1,0,0), e_2=(-1,0,0,0,1), e_4=(0,1,0,0,0)$ est une base de $\ker(A-Id)^2$ qui est donc de dimension 3. Comme la valeur propre 1 est de multiplicité algébrique 3, on en déduit que le sous-espace caractéristique de A est égal à $\ker(A-Id)^2$. On calcule

$$(A-2Id)^2=\begin{pmatrix}0&-2&1&1&-1\\0&1&0&0&0\\1&-2&2&2&-1\\0&0&0&1&0\\-1&0&1&1&0\end{pmatrix}$$

ce qui donne :

$$v \in \ker(A-2Id)^2 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} -2v_2+v_3+v_4-v-5 & =0 \\ v_2 & =0 \\ -v_1-2v_2+2v_3+2v_4-v_1 & =0 \\ -v_1+v_3+v_4 & =0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} v_5 = v_3+v_4 \\ v_2 = \quad 0 \\ v_1 = v_3+v_4 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow v = \begin{pmatrix} v_3+v_4 \\ 0 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_3+v_4 \end{pmatrix} = v_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + v_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $e_3 = (1,0,1,0,1)$ et $e_5 = (1,0,0,1,1)$ est une base du sous-espace caractéristique $ker(A-2Id)^2$.
On détermine une matrice inversible P tel que $P^{-1}AP$ soit triangulaire supérieure.
On choisit $1 = \dim\ker(A-Id)^2 - \dim\ker(A-Id)$ vecteur dans $\ker(A-Id)^2 \setminus \ker(A-Id)$ de sorte à avoir une famille libre. Soit $\varepsilon_3 = e_2 = (0,1,0,0,0)$.
On détermine maintenant $2 = \dim\ker(A-Id)$ vecteurs dans $\dim\ker(A-Id)$ de sorte

- à avoir une famille libre,
- $(A-Id)\varepsilon_3$ appartiennent à cette famille.

Soit $\varepsilon_2 = (A-Id)\varepsilon_3 = (1,0,1,0,0)$ et $\varepsilon_1 = (-1,0,0,0,1)$.
On choisit maintenant $1 = \dim\ker(A-2Id)^2 - \dim\ker(A-2Id)$ vecteur dans $(A-2Id)^2$ de sorte à avoir une famille libre : $\varepsilon_5 = (1,0,0,1,1)$.
On détermine ensuite une famille de $1 = \dim\ker(A-2Id)$ vecteur dans $\ker(A-2Id)$ qui contient $(A-2Id)\varepsilon_5$: $\varepsilon_4 = (A-2Id)\varepsilon_5 = (1,0,1,0,1)$.
Alors $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_5$ est une famille libre. De plus

$$\begin{array}{lr} (A-Id)\varepsilon_1 = 0 \text{ car } \varepsilon_1 \text{ appartient à } \ker(A-Id) \text{ donc} & A\varepsilon_1 = \varepsilon_1. \\ (A-Id)\varepsilon_2 = 0 \text{ car } \varepsilon_2 \text{ appartient à } \ker(A-Id) \text{ donc} & A\varepsilon_2 = \varepsilon_2. \\ (A-Id)\varepsilon_3 = \varepsilon_2 \text{ par construction donc} & A\varepsilon_3 = \varepsilon_2+\varepsilon_3. \\ (A-2Id)\varepsilon_4 = 0 \text{ car } \varepsilon_4 \text{ appartient à } \ker(A-2Id) \text{ donc} & A\varepsilon_4 = 2\varepsilon_4. \\ (A-2Id)\varepsilon_5 = \varepsilon_4 \text{ par construction donc} & A\varepsilon_5 = \varepsilon_4+2\varepsilon_5. \end{array}$$

Notons P la matrice

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice P est la matrice de passage de la base canonique à la base $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_5$. L'endomorphisme représenté par A dans la base canonique a pour matrice dans la base $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_5$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et on a $A = PTP^{-1}$.