L2 Informatique - M32
2018/2019

Chapitre 1
–
ESPACES VECTORIELS : RÉVISIONS

Dans tout ce cours, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

1 Espaces Vectoriels

1.1 Espaces vectoriels

Définition 1.1.1 Un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ est la donnée d'un ensemble E, d'une opération dite interne notée $+$, et d'une opération dite externe notée $\cdot$, vérifiant

1. (a) Pour tout $u, v \in E$, $u + v = v + u$ (l'opération interne est commutative),
   (b) Pour tout $u, v, w \in E$, $(u + v) + w = u + (v + w)$ (l'opération interne est associative),
   (c) Il existe un élément dans E, noté $\vec{0}$, tel que pour tout $u \in E$, $u+\vec{0} = u$ (l'opération possède un élément neutre),
   (d) Pour tout $u \in E$, il existe un unique élément v de E tel que $u + v = \vec{0}$. Cet élément sera noté $-u$ (tout élément de E a un opposé).
2. Pour tout $u, v \in E$ et pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a
   (a) $1 \cdot u = u$,
   (b) $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$,
   (c) $(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda u + \mu \cdot u$,
   (d) $\lambda(\mu \cdot u) = (\lambda\mu) \cdot u$.

Les éléments de E sont appelés vecteurs, les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés scalaires.

Exemple 1.1.2
1. $\mathbb{R}^2$ muni des opérations standard : $(x, y)+(x', y') = (x+x', y+y')$ et $\alpha\cdot(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$ est un espace vectoriel. Il en va de même pour $\mathbb{K}^n$, $n \geq 1$.
2. L'ensemble des suites de nombres réels $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ munis des opérations usuelles ($(u_n)_n + (v_n)_n = (u_n + v_n)_n$ et $\lambda \cdot (u_n)_n = (\lambda u_n)_n$) est un espace vectoriel.
3. L'ensemble des polynômes à coefficients réels $\mathbb{R}[X]$ ou complexes $\mathbb{C}[X]$, l'ensemble des polynômes de degré au plus n coefficients réels, $\mathbb{R}_n[X]$, ou complexes, $\mathbb{C}_n[X]$, munis des opérations usuelles sont des espaces vectoriels.
4. L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des fonctions continues, dérivable, de classe C^1, $C^2, \ldots, C^\infty$ munis des opérations usuelles sont des espaces vectoriels.

Proposition 1.1.3 Pour tout $u \in E$, on a $0 \cdot u = \vec{0}$ et $(-1) \cdot u = -u$.

1.2 Sous-espaces vectoriels

Définition 1.2.1 Soit E un espace vectoriel. On dira que $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de E si

(i) F est non vide,

(ii) F est stable par les opérations $+$ et $\cdot$, autrement dit, pour tout $u, v \in F$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $u + \lambda v$ appartient à F.

Exemple 1.2.2
1. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x - z = 0,\; 2x - y - z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x - z = 1\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
3. $C^2(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $C^1(\mathbb{R})$.
4. $\mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

Proposition 1.2.3 Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors $\vec{0}$ appartient à F et F est lui-même un espace vectoriel.

Proposition 1.2.4 Soit E un espace vectoriel, $F_1, \ldots, F_k$ des sous-espaces vectoriels de E. Alors l'ensemble

$$F_1 + F_2 + \ldots + F_k = \{u_1 + \ldots + u_k /\; u_1 \in F_1, \ldots, u_k \in F_k\},$$

appelé *sommes des sous-espaces* $F_1, \ldots, F_k$, est un sous-espace vectoriel de E.

Preuve : On note $F = F_1 + \ldots + F_k$. Comme $\vec{0}$ appartient à F_i quel que soit i, $\vec{0} = \vec{0} + \ldots \vec{0}$ appartient à F et ce dernier n'est pas vide.
Soient $u, v \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors il existe $u_1, v_1 \in F_1, \ldots, u_k, v_k \in F_k$ tels que $u = u_1 + \ldots + u_k$ et $v = v_1 + \ldots v_k$. Ainsi

$$\begin{aligned} u + \lambda v &= u_1 + \ldots + u_k + \lambda(v_1 + \ldots + v_k) \\ &= u_1 + \ldots + u_k + \lambda v_1 + \ldots + \lambda v_k \\ &= (u_1 + \lambda v_1) + \ldots + (u_k + \lambda v_k). \end{aligned}$$

Pour tout i, $u_i + \lambda v_i$ appartient à F_i et donc $u + \lambda v$ appartient encore à F. $\square$

Définition 1.2.5 Soit E un espace vectoriel et $F_1, \ldots, F_k$ des sous-espaces vectoriels de E. La somme $F_1 + F_2 + \ldots + F_k$ est dite *directe* si pour tout $u \in F_1 + \ldots + F_k$, il existe un unique k-uplet $(u_1, \ldots, u_k) \in F_1 \times \ldots \times F_k$ tel que $u = u_1 + \ldots + u_k$.
Dans ce cas on note $F_1 \oplus \ldots \oplus F_k$. Si de plus $F_1 \oplus \ldots \oplus F_k = E$, on dira que $F_1, \ldots, F_k$ sont en somme directe dans E.
Deux sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 de E sont dit *supplémentaires* si $E = F_1 \oplus F_2$, autrement dit : tout vecteur de E s'écrit comme somme d'éléments de F_1 et F_2 et cette écriture est unique.

Proposition 1.2.6 Soit E un espace vectoriel, F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Alors la somme $F_1 + F_2$ est directe si et seulement si $F_1 \cap F_2 = \{\vec{0}\}$.

Exemple 1.2.7 Dans $\mathbb{R}^3$, on considère $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 /\; x + y + z = 0\}$ et $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 /\; x - y = 0\}$. Alors $F_1 + F_2$ n'est pas directe car $(0, 0, 1) = (1, 1, -2) + (-1, -1, 3) = (0, 0, 0) + (0, 0, 1)$.

Théorème 1.2.8 Une intersection quelconque de sous-espaces vectoriels est encore un sous-espace vectoriel.

Remarque 1.2.9 En général, la réunion de sous-espaces vectoriels n'est pas un sous-espace vectoriel.

Définition 1.2.10 Soit E un espace vectoriel, A un sous ensemble de E. On appelle sous-espace vectoriel engendré par A et on note $\langle A\rangle$ le plus petit sous-espace vectoriel (au sens de l'inclusion) contenant A. On a $\langle A\rangle = \bigcap_{\substack{F \text{ sev de } E \\ A\subset F}} F$.

Proposition 1.2.11 Soit $u_1,\dots,u_k$ des vecteurs de E. On a

1. $\langle u_1,\dots,u_k\rangle = \{\lambda_1 u_1+\ldots+\lambda_k u_k /\ \lambda_1,\dots,\lambda_k\in\mathbb{K}\}$.
2. $\forall \lambda_1,\dots,\lambda_k\in\mathbb{K}$, $\lambda_1\neq 0$ $\langle u_1,\dots,u_k\rangle = \langle \lambda_1 u_1+\ldots+\lambda_k u_k, u_2,\dots,u_k\rangle$.
3. Si u_k appartient à $\langle u_1,\dots,u_{k-1}\rangle$, $\langle u_1,\dots,u_{k-1}\rangle$=$\langle u_1,\dots,u_{k-1},u_k\rangle$.

2 Dimension d'un espace vectoriel

Dans cette partie, E désigne un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$.

2.1 Famille libre, génératrice, base

Définition 2.1.1 Soit $u_1,\dots,u_k$ des vecteurs de E. On dit que

1. la famille $u_1,\dots,u_k$ est une famille génératrice de E si $\langle u_1,\dots,u_k\rangle = E$, autrement dit, pour tout $u\in E$, il existe $\lambda_1,\dots,\lambda_k\in\mathbb{K}$ tel que $u=\lambda_1u_1+\ldots+\lambda_ku_k$. On dira que E est de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie.
2. la famille $u_1,\dots,u_k$ est libre si pour tout $\lambda_1,\dots,\lambda_k\in\mathbb{K}$, $\lambda_1u_1+\ldots+\lambda_ku_k = \vec{0}$ implique $\lambda_1=\ldots=\lambda_k=0$. Une famille qui n'est pas libre est dite liée.
3. la famille $u_1,\dots,u_k$ est une base si c'est une famille à la fois libre et génératrice.

Exemple 2.1.2 Dans $\mathbb{R}^3$, la famille $\vec{v_1}(1,0,1)$, $\vec{v_2}(0,2,2)$ et $\vec{v_3}(3,6,1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Proposition 2.1.3 Soit $u_1,\dots,u_k$ une base de E. Alors pour tout $w\in E$, il existe un unique k-uplet $(\lambda_1,\dots,\lambda_k)\in\mathbb{K}$ tel que

$$w=\lambda_1u_1+\ldots+\lambda_ku_k.$$

Proposition 2.1.4 Soit $u_1,\dots,u_k$ des vecteurs de E.

1. Si $u_1,\dots,u_k$ est une famille libre, alors quel que soit j, $u_j\neq\vec{0}$.
2. Si $u_1,\dots,u_k$ est une famille libre, alors pour tout j, la famille $u_1,\dots,u_{j-1},u_{j+1},\dots,u_k$ est encore une famille libre.
3. Si $u_1,\dots,u_k$ est une famille libre, et si un vecteur u_{k+1} de E n'appartient pas à $\langle u_1,\dots,u_k\rangle$, alors la famille $u_1,\dots,u_k,u_{k+1}$ est encore une famille libre.
4. Si $u_1,\dots,u_k$ est une famille génératrice de E, alors quel que soit $v\in E$, $u_1,\dots,u_k,v$ est encore une famille génératrice de E.
5. Si $u_1,\dots,u_k$ est une famille génératrice de E, alors pour tout j, tout $\lambda_1,\dots,\lambda_k\in\mathbb{K}$ tels que $\lambda_j\neq 0$, alors $u_1,\dots,u_{j-1},\sum_{i=1}^k\lambda_iu_i,u_{j+1},\dots,u_k$ est encore une famille génératrice de E.

Théorème 2.1.5 Si $u_1,\dots,u_n$ est une famille libre de E et si $v_1,\dots,v_m$ est une famille génératrice de l'espace vectoriel E, alors $n\leq m$. De plus, peut-être après avoir renuméroter les vecteurs $v_1,\dots,v_m$, la famille $u_1,\dots,u_n,v_{n+1},\dots,v_m$ est encore une famille génératrice.

Corollaire 2.1.6 Si E possède une famille génératrice à p vecteurs, alors toute famille de $p+1$ vecteurs est liée.

Si $u_1,\dots,u_n$ et $v_1,\dots,v_m$ sont des bases de E, alors $u_1,\dots,u_n$ est une famille libre et $v_1,\dots,v_m$ est une famille génératrice donc $n\leq m$. De même $m\leq n$. Les bases ont donc toutes le même nombre d'éléments. Cela va nous permettre de définir la notion de dimension :

2.2 Existence d'une base et dimension

Théorème 2.2.1 (de la base incomplète) Si E est un espace vectoriel de dimension finie, on peut compléter toute famille libre $u_1, \ldots, u_k$ de E en une base $u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_n$ de E. En particulier, toute espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{\vec{0}\}$ admet une base.

Définition 2.2.2 Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Si E n'est pas réduit à $\{\vec{0}\}$, on appelle dimension de E et on note $\dim E$ le nombre de vecteurs d'une base de E. Si E est réduit à $\{\vec{0}\}$, on pose $\dim E = 0$.

Proposition 2.2.3 Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Alors

1. La famille libre $u_1, \ldots, u_k$ est une base de E si et seulement si $k = \dim E$.
2. La famille génératrice $u_1, \ldots, u_k$ est une base de E si et seulement si $k = \dim E$.

2.3 Dimension d'un sous-espace vectoriel

Théorème 2.3.1 Si E est de dimension finie alors tout sous-espace vectoriel F de E est de dimension finie et $\dim E \geq \dim F$. De plus, $\dim E = \dim F$ si et seulement si $E = F$.

Proposition 2.3.2 Soit E un espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

En particulier, $E = F \oplus G$ si et seulement si $F \cap G = \{\vec{0}\}$ et $\dim E = \dim F + \dim G$.

Théorème 2.3.3 Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $F_1, \ldots, F_k$ des sous-espaces vectoriels de E. Les assertions suivantes sont équivalentes

1. la somme $F_1 + \ldots + F_k$ est directe
2. pour tout $u_1 \in F_1, \ldots, u_k \in F_k$, $u_1 + \ldots + u_k = \vec{0}$ implique $u_1 = \ldots = u_k = \vec{0}$.
3. Si $u_{11}, \ldots, u_{1n_1}$ est une base de $F_1, \ldots, u_{k1}, \ldots, u_{kn_k}$ est une base de F_k alors $u_{11}, \ldots, u_{1n_1} \ldots,$ $u_{k1}, \ldots, u_{kn_k}$ est une base de $F_1 + \ldots + F_k$.

De plus, dans ce cas, $\dim(F_1 + \ldots + F_k) = \dim F_1 + \ldots + \dim F_k$.

2.4 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 2.4.1 Soit $u_1, \ldots, u_k$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E. On appelle rang de la famille $u_1, \ldots, u_k$, et on note rg $(u_1, \ldots, u_k)$, la dimension du sous espace $\langle u_1, \ldots, u_k \rangle$.

Comme de toute famille génératrice on peut extraire une base du sous-espace qu'elle engendre, le rang de $u_1, \ldots, u_k$ est le nombre maximum de vecteurs linéairement indépendants que l'ont peut trouver parmi les u_i.

Exemple 2.4.2 Calculons le rang de la famille (1,1,1,1), (1,2,3,4), (0,1,2,3), (1,3,5,7).

Proposition 2.4.3 Soit $u_1, \ldots, u_k$ une famille de vecteurs libre. Soit

$$\begin{aligned}
v_1 &= u_1 + \lambda_{1,2} u_2 + \ldots + \lambda_{1,k} u_k \\
v_2 &= u_2 + \lambda_{2,3} u_3 + \ldots + \lambda_{2,k} u_k \\
&\vdots \\
v_{k-1} &= u_{k-1} + \lambda_{k-1,k} u_k \\
v_k &= u_k
\end{aligned}$$

Alors rg $(v_1, \ldots, v_k) = k$.

3 Applications linéaires

Dans cette partie, E, F et G sont trois espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{K}$ dont les éléments sont respectivement notés $\vec{0}_E$, $\vec{0}_F$ et $\vec{0}_G$.

Définition 3.0.1 On dit que $f : E \to F$ est une application linéaire ou un homomorphisme de E dans F si

(i) $\forall u \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $f(\lambda u) = \lambda f(u)$,

(ii) $\forall u, v \in E$, $f(u+v) = f(u) + f(v)$.

On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des homomorphismes de E dans F. Si $E = F$, on parle d'endomorphisme et on note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
Si f est bijective, on parle d'isomorphisme.
Si $E = F$ et si f est bijective, on parle d'automorphisme et on note $\mathrm{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.

Exemple 3.0.2 Soit $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie pour $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ par

$$u(x) = (x_1 + x_2 + x_3, 2x_1 + x_2 - x_3).$$

Vérifions que u est linéaire.
Soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,y,z) = xy$. Alors g n'est pas linéaire puisque $g(2,2,0) = 4 \neq 2 = g(1,1,0) + g(1,1,0)$.
Soit $E = C^1(\mathbb{R})$ et $\varphi : E \to E$ définie par $\varphi(g) = g'$. Alors φ est un endomorphisme de E mais E n'est pas bijective donc ce n'est pas un automorphisme. De même, $\psi : E \to E$ qui à $g \in E$ associe G la primitive de g qui s'annule en 0 : $G(t) = \int_0^t g(x)dx$ est aussi un endomorphisme de E.

Théorème 3.0.3 Les composées et sommes d'applications linéaires sont linéaires. Le produit d'une application linéaire par un scalaire est une application linéaire.

On en déduit le corollaire suivant :

Corollaire 3.0.4 $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des homomorphismes de E dans F est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Définition 3.0.5 Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On appelle noyau de f et note $\ker f$ l'ensemble

$$\ker(f) = \{u \in E /\ f(u) = \vec{0}_F\}.$$

On appelle image de f et on note $\mathrm{Im}\ (f)$ l'ensemble

$$\mathrm{Im}\ (f) = f(E).$$

Proposition 3.0.6 Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors

(i) $\ker f$ et $\mathrm{Im}\ f$ sont des sous-espaces vectoriels de E et F respectivement.

(ii) f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}\ f = F$.

(iii) f est injective si et seulement si $\ker f = \{\vec{0}_E\}$.

Exemple 3.0.7 Soit $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie pour $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ par

$$u(x) = (x_1 + x_2 + x_3, 2x_1 + x_2 - x_3).$$

Déterminons une base de $\ker u$. En déduire que u n'est pas injective.

Théorème 3.0.8 Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors si f est un isomorphisme, f^{-1} est linéaire.

Définition 3.0.9 Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle rang de f et on note rg (f) la dimension de Im f.

Exemple 3.0.10 Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ définie par $f(P) = P'$. Alors rg $(f) = n - 1$. En effet, Im $f = \{P \in E/\ P$ est de degré au plus $n - 1\}$.

Proposition 3.0.11 Soit $u_1, \ldots, u_k$ une base de E. Une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est uniquement déterminée par la donnée de $f(u_1), \ldots, f(u_k)$

Proposition 3.0.12 Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $u_1, \ldots, u_k$ une base de E. Alors

$$\text{rg }(f) = \text{rg }(f(u_1), \ldots, f(u_k)).$$

Théorème 3.0.13 (du rang) Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Si E est de dimension finie, alors

$$\dim E = \dim(\ker f) + rg(f) = \dim \ker f + \dim \text{Im } f.$$

Corollaire 3.0.14 Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Si E et F sont des espaces vectoriels de dimension finie et égales, alors f est bijective si et seulement si $\ker f = \{\vec{0}_E\}$.

Soiet $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie pour tout vecteur $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par

$$f(u) = (-2x + y + z, x - 2y + z, x + y - 2z).$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Donner une base de $\ker f$ et en déduire dim(Im f).
3. Donner une base de Im f.

4 Matrices et applications linéaires

4.1 Les matrices

Définition 4.1.1 On appelle matrice à n lignes et m colonnes, à coefficients dans $\mathbb{K}$, le tableau suivant :

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, l'ensemble de ces matrices. Lorsque $n = m$, on dit que les matrices sont carrées et on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées.

On définit

(i) une addition : Soient $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nm} \end{pmatrix}$. Alors

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \ldots & a_{1m} + b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \ldots & a_{nm} + b_{nm} \end{pmatrix}$$

(addition composante par composante),

(ii) une multiplication externe par un élément de $\mathbb{K}$ sur chaque composante : Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$, alors

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \dots & \lambda a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Muni de ces deux opérations, l'ensemble $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ a une structure d'espace vectoriel de dimension $n \times m$ et dont la base canonique est l'ensemble des matrices dont tous les coefficients sont nuls exceptés un qui vaut 1.

(iii) un produit de matrices. Pour $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq p}} \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$ on pose :

$$A \cdot B = (c_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \text{ où } c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Remarquons que ce produit n'est possible que si le nombre de colonnes de la matrice A est égal au nombre de lignes de la matrice B et qu'il n'est évidemment pas commutatif, même dans le cas des matrices carrées.

Exemple 4.1.2

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 23 & 9 \end{pmatrix}$$

Définition 4.1.3 Soit $M = (m_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. La matrice M est dite

— triangulaire supérieure si $m_{ij} = 0$ pour tout (i, j) tel que $i > j$,
— triangulaire inférieure si $m_{ij} = 0$ pour tout (i, j) tel que $i < j$,
— diagonale si $m_{ij} = 0$ pour tout (i, j) tel que $i \neq j$,
— symétrique si $m_{ij} = m_{ji}$ pour tout (i, j).

Exemple 4.1.4 La matrice diagonale de taille n qui n'a que des 1 sur la diagonale est notée I_n et est appelée matrice identité de taille n.

Définition 4.1.5 Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}}$. On appelle transposée de A, la matrice $A^t = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}}$ où $b_{ij} = a_{ji}$ pour tout (i, j).

Exemple 4.1.6

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Définition 4.1.7 Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite inversible s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A.B = B.A = I_n$. La matrice B est appelée inverse de A. On la note A^{-1}.
On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées inversibles de taille n.

Exemple 4.1.8

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 7 & -3 & -5 \\ -8 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

4.2 Matrice d'une application linéaire

Soient E, F et G trois espaces vectoriels, $e_1, \ldots, e_m$ une base de E, $f_1, \ldots, f_n$ une base de F, $g_1, \ldots, g_p$ une base de G.

Définition 4.2.1 Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle matrice de φ dans les bases $e_1, \ldots, e_m$ et $f_1, \ldots, f_n$ la matrice A dont les m colonnes sont les coordonnées des vecteurs $\varphi(e_i)$ dans la base $f_1, \ldots, f_n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{12} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

où pour $1 \leq j \leq m$, $\varphi(e_j) = a_{1j} f_1 + \ldots + a_{nj} f_n$.

Inversement, à toute matrice n ligne et m colonnes on peut associer une application linéaire de E dans F. On définit ainsi une bijection de l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F. C'est en fait un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Proposition 4.2.2 Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(E, F)$ et A et B les matrices de φ et ψ respectivement dans les bases $e_1, \ldots, e_m$ et $f_1, \ldots, f_n$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors la matrice de $\varphi + \psi$ dans ces mêmes bases est la matrice $A + B$ et la matrice de $\lambda\varphi$ est λA.

Proposition 4.2.3 Soient $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$, $\psi \in \mathcal{L}(F, G)$ et A la matrice de φ dans les bases $e_1, \ldots, e_m$ et $f_1, \ldots, f_n$ et B la matrice ψ dans les bases $f_1, \ldots, f_n$ et $g_1, \ldots, g_p$. Alors la matrice de $\psi \circ \varphi$ dans les base $e_1, \ldots, e_m$ et $g_1, \ldots, g_p$ est la matrice $B \cdot A$.

Exemple 4.2.4 Soit e_1, e_2, e_3 la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit p l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qui à tout vecteur $u = (x, y, z)$ associe le vecteur

$$p(u) = (2x + y + 2z, y, -x - y - z).$$

Donner la matrice A de p dans la base e_1, e_2, e_3. Même question pour p^2.

Proposition 4.2.5 On suppose que $\dim E = \dim F = n$. Soient $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ et A la matrice de φ dans les bases $e_1, \ldots, e_n$ et $f_1, \ldots, f_n$. Alors la matrice de φ est un isomorphisme si et seulement si A est inversible. De plus, dans ce cas, la matrice de φ^{-1} dans les bases $f_1, \ldots, f_n$ et $e_1, \ldots, e_n$ est A^{-1}.

4.3 Matrice de changement de bases

Soit E un espace vectoriel, $e_1, \ldots, e_n$ et $e'_1, \ldots, e'_n$ deux bases de E. Pour $1 \leq j \leq n$, on note $(a_{ij})_{1 \leq i \leq n}$ les coordonnées de e'_j dans la base $e_1, \ldots, e_n$:

$$e'_j = a_{1j} e_1 + \ldots + a_{nj} e_n.$$

Définition 4.3.1 La matrice $P = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ est appelé matrice de passage de la base $e_1, \ldots, e_n$ et à la base $e'_1, \ldots, e'_n$.

Proposition 4.3.2 Soit $P = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice de passage de la base $e_1, \ldots, e_n$ et à la base $e'_1, \ldots, e'_n$. Alors P est inversible et P^{-1} est la matrice de passage de $e'_1, \ldots, e'_n$ et $e_1, \ldots, e_n$.

Proposition 4.3.3 Soit $v \in E$ et soit $(\lambda'_1, \ldots, \lambda'_n)$ les coordonnées de v dans la base $e'_1, \ldots, e'_n$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ les coordonnées de v dans la base $e_1, \ldots, e_n$ ($v = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n$ et $v = \lambda'_1 e'_1 + \ldots + \lambda'_n e'_n$). Alors

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \vdots \\ \lambda'_n \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \vdots \\ \lambda'_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Théorème 4.3.4 Soit E et F deux espaces vectoriels, $e_1, \ldots, e_m$ et $e'_1, \ldots, e'_m$ deux bases de E $f_1, \ldots, f_n$ et $f'_1, \ldots, f'_n$ deux bases de F, $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$, A la matrice de φ dans les bases $e_1, \ldots, e_m$ et $f_1, \ldots, f_n$, A' la matrice de φ dans les bases $e'_1, \ldots, e'_m$ et $f'_1, \ldots, f'_n$, P la matrice de passage de $e_1, \ldots, e_m$ vers $e'_1, \ldots, e'_m$ et Q la matrice de passage de $f_1, \ldots, f_n$ vers $f'_1, \ldots, f'_n$. Alors

$$A' = Q^{-1}AP.$$

4.4 Rang d'une matrice

Définition 4.4.1 Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. On appelle rang de la matrice A et on note rg (A) le rang de ses vecteurs colonnes.

Si A est vue comme la matrice d'une application linéaire φ de E dans F avec $\dim E = m$ et $\dim F = n$, alors rg $(A) =$ rg (φ).

Théorème 4.4.2 Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ de rang r. Alors il existe $P \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversibles telles que

$$A = Q \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Corollaire 4.4.3 Soient $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, $P \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ inversible et $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible. Alors rg $(AP) =$ rg $(QA) =$ rg (A).

Corollaire 4.4.4 Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Alors rg $(A) = rg(A^t)$.

Théorème 4.4.5 Soient E et F deux espaces vectoriels de même dimension n, soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire et A sa matrice dans des bases de E et F. Alors les assertions suivantes sont équivalentes

1. f est inversible,
2. A est inversible,
3. rg $(f) = n$,
4. $\dim \mathrm{Im}\ (f) = n$,
5. rg $(A) = n$,
6. $\ker f = \{\vec{0}_E\}$.

Exemple 4.4.6 Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $u \in \{calL\}(\mathbb{R}^3)$ définie pour $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ par

$$u(x) = (x_2 - 2x_3, 2x_1 - x_2 + 4x_3, x_1 - x_2 + 3x_3).$$

1. Déterminer la matrice A de u dans la base canonique. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.
2. Déterminer le rang de A.
3. Montrer que $\dim \ker(u) = 1$ et déterminer un vecteur $c \in \ker(u)$ non nul.
4. Déterminer une base (a, b) de $\ker(u - I)$.
5. Montrer que $\beta' = (a, b, c)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
6. Déterminerla matrice D de u dans la base β'.
7. Montrer que Im $(u) = \ker(u - I)$.
8. Montrer que $\ker(u) \oplus \mathrm{Im}\ (u) = \mathbb{R}^3$.