



Fiche n° 6

Ex 1. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{]0,1[} f(x^n) d\lambda(x)$ lorsque

- a) $f :]0,1[\rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ est décroissante ;
- b) $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\lambda)$ est positive et croissante.

Ex 2. Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, λ -intégrable sur \mathbb{R}_+ . Calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{]0,+\infty[} \frac{f(x)}{1+n \sin^2 x} d\lambda(x).$$

Ex 3. Étudier

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln n} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(n+x) \cos(nx)}{1+x^2} dx.$$

Ex 4. Étudier

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^1 \left| \sin \frac{\pi}{x} \right|^\alpha dx, \quad \alpha > 0.$$

Ex 5. Étudier

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{x/2} dx \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx.$$

Ex 6. Calculer $\int_0^1 \frac{dy}{1+y^2}$. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

Ex 7. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{e^x - 1} dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a}{k^2 + a^2}$.

Ex 8. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, telle que pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction $f_a : t \mapsto e^{at} f(t)$ soit λ -intégrable sur \mathbb{R} .

1) Montrer que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \int_{\mathbb{R}} e^{zt} f(t) d\lambda(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} \int_{\mathbb{R}} t^k f(t) d\lambda(t).$$

2) Qu'en déduit-on pour la fonction de z définie par le premier membre de cette égalité ?

Ex 9.

Soit K un compact de \mathbb{C} et μ une mesure finie sur $(K, \text{Bor}(K))$. On pose

$$f(z) := \int_K \frac{d\mu(\omega)}{\omega - z}.$$

- 1) Montrer que cette formule f définit f sur l'ouvert $D = \mathbb{C} \setminus K$.
- 2) Montrer que f est *analytique* sur D , *i.e.* que pour tout $z_0 \in D$, on peut trouver un disque ouvert de centre z_0 sur lequel f est développable en série entière de la variable $Z = z - z_0$.
- 3) Montrer sans utiliser l'analyticité de f que f est *holomorphe* sur D , c'est-à-dire dérivable relativement à la variable z en tout point de D .

Ex 10. *Intégrale fonction de sa borne supérieure*

Soit f une application Lebesgue-intégrable sur un intervalle $[a, b]$. On pose, pour tout $x \in [a, b]$, $F(x) = \int_{[a, x]} f(t) d\lambda(t)$. Montrer que F est continue et que F est dérivable en tout point où f est continue.

Ex 11. On pose

$$f(x) := \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 e^{-xt} dt.$$

- 1) Vérifier que l'on définit ainsi la fonction f sur \mathbb{R}_+ .
- 2) Montrer que f est continue sur \mathbb{R}_+ et deux fois dérivable sur \mathbb{R}_+^* .
- 3) Calculer f'' et les limites en $+\infty$ de f et f' . En déduire une expression simple de f .

Ex 12. Soit $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, λ -intégrable sur $[0, 1]$. On pose

$$f(x) := \int_{[0, 1]} |\varphi(t) - x| d\lambda(t).$$

- 1) Montrer que f est définie et continue sur \mathbb{R} .
- 2) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que si $\lambda(\{\varphi = x_0\}) = 0$, alors f est dérivable au point x_0 .

Ex 13. *Fonction Gamma*

On pose pour tout $x > 0$,

$$\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

- 1) Montrer que la fonction Γ est continue, de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$. Calculer les dérivées successives $\Gamma^{(n)}$ de Γ .

2) Montrer que

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt.$$

3) Soient a et s deux réels strictement positifs. Calculer $A := \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-at} dt$.
Montrer que pour $s > 1$, on a $\int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt = \sum_{n \geq 1} \Gamma(s) n^{-s}$.

4) Exprimer $A_n := \int_0^{+\infty} t^{2n} e^{-t^2} dt$ à partir de la fonction Γ . Montrer que la fonction $t \mapsto e^{-t^2} \cos at$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. Calculer l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos at dt$ à partir de $\Gamma(n + 1/2)$. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos at dt$.

5) Autre méthode : On pose pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f_n(t) := e^{-t^2/2} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{a^{2k} t^{2k}}{(2k)!}.$$

Quelle est la limite de la suite f_n quand n tend vers l'infini ? Par application du théorème de Lebesgue, retrouver l'intégrale précédente.