Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IFP **Année 2003-04**

Fiche n° 5

Ex 1. *Intégration par rapport à une probabilité conditionnelle*

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ une espace probabilisé et $B \in \mathcal{F}$ un évènement de probabilité non nulle. On note P_B la mesure $\mathbf{P}(\,.\mid B)$. Vérifier que P_B a une densité par rapport à $\mathbf{P}$. Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, $\mathbf{P}$-intégrable. Vérifier qu'elle est P_B-intégrable et exprimer son espérance sous P_B comme une espérance sous $\mathbf{P}$.

Ex 2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante dans $\mathcal{M}_+$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu \leq M < +\infty.$$

Montrer que $\big(f_n(\omega)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée pour μ-presque tout $\omega \in \Omega$.

Ex 3. Montrer que si f est une fonction borélienne impaire $[-1,1] \to \mathbb{R}$ et bornée, elle est λ intégrable et $\int_{[-1,1]} f \,\mathrm{d}\lambda = 0$. Quelles propriétés de λ utilise-t-on ici ? Étendre ce résultat à d'autres mesures que λ.

Ex 4. *Mesure de Lebesgue et théorème de transfert*

On note λ_d la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ et $\lambda = \lambda_1$. Les changements de variable de cet exercice devront être justifiés directement à partir du théorème de transfert.

1) Montrer que si f est λ_d-intégrable sur $\mathbb{R}^d$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}\lambda_d(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(-x)\,\mathrm{d}\lambda_d(x).$$

2) Si f est λ intégrable sur $\mathbb{R}$, exprimer $\int_{\mathbb{R}} f(ax+b)\,\mathrm{d}\lambda(x)$ en fonction de $\int_{\mathbb{R}} f\,\mathrm{d}\lambda$, $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$ étant des constantes. Traiter aussi le cas $a < 0$.

3) Soit f λ-intégrable sur $\mathbb{R}$ et $c > 0$. Montrer que pour λ-presque tout $x \in \mathbb{R}$, la série

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} f\Big(\frac{x}{c} + k\Big)$$

est absolument convergente (ce qui justifie *a posteriori* la façon d'écrire l'indexation). Montrer que la fonction F égale à la somme de cette série là où elle est absolument convergente et à 0 ailleurs est périodique de période c et λ-intégrable sur $]0, c[$. *Indication :* commencer par établir la convergence de la série $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} |f(x/c+k)|\,\mathrm{d}\lambda(x)$.

Ex 5. Calculer la fonction caractéristique de la variable aléatoire X (cf. exemple 4.1 du cours) lorsque X suit la loi $\mathrm{Bin}(n, p)$, puis la loi $\mathrm{Geom}(p)$.

Ex 6. *Variations sur l'inégalité de Markov*

Soit Y une variable aléatoire positive définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

1) On suppose que $\mathbf{E}Y < +\infty$. Montrer que $\mathbf{P}(Y > t) = o(t^{-1})$ quand t tend vers $+\infty$.

2) Si pour un réel $\alpha > 0$, $\mathbf{E}(Y^\alpha) < +\infty$, que peut-on dire de la vitesse de convergence vers 0 de $\mathbf{P}(Y > t)$ quand t tend vers $+\infty$? Même question si $\mathbf{E}\exp(\alpha Y) < +\infty$.

3) *Inégalité de Chernoff.* Soit X une variables aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ telle que pour un certain $a > 0$, $\mathbf{E}\big(\mathrm{e}^{aX}\big)$ soit finie. Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{P}(X \geq t) \leq \mathrm{e}^{-at}\mathbf{E}\big(\mathrm{e}^{aX}\big).$$

Ex 7. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Prouver l'inégalité :

$$\forall t > 0, \quad \mathbf{P}(X \geq t, Y \geq t) \leq \frac{\mathbf{E}(X^2Y^2)}{t^4}.$$

Proposez et justifiez d'autres inégalités du même type...

Ex 8. *Borel-Cantelli et la majoration asymptotique des records*

Dans tout l'exercice, $(X_k)_{k\geq 1}$ désigne une suite de variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. On ne fait aucune hypothèse sur la structure de dépendance de cette suite. On s'intéresse au comportement de la suite de varibles aléatoires

$$M_n := \max_{1\leq k\leq n} X_k.$$

1) On suppose dans cette question que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \mathbf{P}(X_k \geq t) \leq \mathrm{e}^{-t}.$$

1. a) Montrer que pour tout $n \geq 1$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\mathbf{P}(M_n \geq t \ln n) \leq n^{1-t}$.
1. b) On fixe une constante $c > 2$. Montrer que l'inégalité $M_n \leq c \ln n$ est vérifiée presque sûrement pour tout n à partir d'un certain rang (aléatoire).
1. c) Montrer que $\displaystyle\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln n} M_n \leq 2$ p.s.

2) On suppose dans cette question que

$$\sup_{k\in\mathbb{N}^*} \mathbf{E}|X|^3 < +\infty.$$

2. a) Proposer un majorant de $\mathbf{P}(M_n \geq tn^a)$ pour $t \in \mathbb{R}_+$ et $a > 0$.
2. b) On fixe $\varepsilon > 0$. Montrer que l'inégalité $M_n \leq n^{2/3+\varepsilon}$ est vérifiée presque sûrement pour tout n à partir d'un certain rang (aléatoire).

Ex 9. *Théorème de convergence décroissante*

Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite décroissante de fonctions mesurables positives sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ telle que f_1 soit μ-intégrable. Montrer que (f_n) converge simplement vers f, que f est intégrable et que $\lim\limits_{n} \int_\Omega f_n \, d\mu = \int_\Omega f \, d\mu$.

Trouver un contre-exemple dans le cas où l'on omet la condition f_1 μ-intégrable.

Ex 10. *Interversion limite intégrale et convergence uniforme*

Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite d'applications intégrables de $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ dans $(\mathbb{R}, \mathrm{Bor}(\mathbb{R}))$ où μ est une mesure *finie*.

1) Montrer que si (f_n) converge uniformément vers f sur Ω, alors f est intégrable et $\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu$.

2) Le résultat subsiste-t-il si μ n'est plus supposée finie ?

Ex 11. *Caractérisations de l'intégrabilité*

Soit μ une mesure finie sur $(\Omega, \mathcal{F})$ et $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ une application finie μ-presque partout. Montrer que les quatre conditions suivantes sont équivalentes :

a) f est μ-intégrable

b) $\lim_{n\to+\infty} \int_{\{|f|>n\}} |f| \, \mathrm{d}\mu = 0$

c) $\sum\limits_{n\geq 1} n\mu\{n < |f| \leq n+1\} < +\infty$

d) $\sum\limits_{n\geq 0} \mu\{|f| > n\} < +\infty$.

Ex 12. *Intégrabilité des fonctions monotones*

Soit f une fonction monotone $[a, b] \to \mathbb{R}$ $(-\infty < a < b < +\infty)$.

1) Montrer qu'elle est Riemann intégrable.

2) Montrer qu'elle est aussi Lebesgue intégrable (*i.e.* relativement à λ) sur $[a, b]$ et comparer $\int_{[a,b]} f \, \mathrm{d}\lambda$ et $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$.

Ex 13. Pourquoi la fonction $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ n'est-elle pas Riemann intégrable sur $[0, 1]$, mais Lebesgue intégrable ?

Ex 14. Soit (f_n) la suite de fonctions $[0, 1] \to \mathbb{R}$ définies par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = k2^{-n}, \text{ où } k \in \mathbb{N} \quad 0 \leq k \leq 2^n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1) Montrer que pour tout n, f_n est intégrable au sens de Riemann et calculer son intégrale (de Riemann).

2) Montrer que la suite f_n est bornée par une fonction intégrable au sens de Riemann et que f_n converge simplement vers une fonction f *non intégrable* au sens de Riemann. Conclusion ?

Ex 15. *Intégrabilité et comportement au $V(\infty)$*

1) Soit μ une mesure sur $(\mathbb{R}^d, \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^d))$ et $g : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ une application μ-intégrable. On note $\|y\|$ une norme sur $\mathbb{R}^d$ (on sait qu'elles sont toutes équivalentes) et B un borélien *borné* de $\mathbb{R}^d$. Prouver que

$$\lim_{\|y\|\to+\infty} \int_{B+y} g \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Indication : on montrera d'abord que $\lim_{n\to+\infty} \int_{\{\|x\|>n\}} |g| \, \mathrm{d}\mu = 0$.

2) On suppose que $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$ et qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $|f|^\alpha$ soit λ_d-intégrable sur $\mathbb{R}^d$. Montrer qu'alors $\lim_{\|x\|\to+\infty} f(x) = 0$. *Indications :* on pourra raisonner par l'absurde. Si f ne tend pas vers 0 en l'infini, il existe $\varepsilon > 0$ et une suite (y_n) dans $\mathbb{R}^d$ telle que $\|y_n\|$ tende vers $+\infty$ et $|f(y_n)| \geq \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe une boule ouverte B telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in B + y_n, \quad |f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}.$$

3) Pour voir que l'hypothèse de continuité *uniforme* est indispensable à la question précédente, construire une fonction f continue $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, d'intégrale de Riemann généralisée absolument convergente sur $]-\infty, +\infty[$ et telle que $\lim_{n\to+\infty} f(n) = +\infty$.