Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IFP **Année 2003-2004**

Fiche n° 4

Ex 1. Soit f une fonction mesurable positive de $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ dans $(\overline{\mathbb{R}}_+, \mathrm{Bor}(\overline{\mathbb{R}}_+))$. On suppose que $\mu(\{f = +\infty\}) > 0$. Montrer que $\int_\Omega f d\mu = +\infty$.

Ex 2. *Intégration sur un sous-ensemble de* Ω

Nous notons $\mathcal{M}_+$ l'ensemble des applications $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$, mesurables $\mathcal{F}$-$\mathrm{Bor}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ et $\mathcal{E}_+$, l'ensemble des fonctions étagées mesurables positives. Soit $f \in \mathcal{M}_+$. Dans le cours, on appelle intégrale sur Ω de f par rapport à μ l'élément de $\overline{\mathbb{R}}_+$ noté $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu$ et défini par

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu := \sup\left\{ \int_\Omega u \,\mathrm{d}\mu;\ u \in \mathcal{E}_+,\ u \leq f \right\}. \tag{1}$$

Pour $A \in \mathcal{F}$, $f\mathbf{1}_A$ appartient encore à $\mathcal{M}_+$ et on définit aussi

$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu := \int_\Omega f\mathbf{1}_A \,\mathrm{d}\mu. \tag{2}$$

La définition de $\int_A f \,\mathrm{d}\mu$ pose un problème de cohérence car on pourrait considérer A muni de la tribu trace de $\mathcal{F}$ et de la restriction de μ comme un espace mesuré et lui appliquer la définition (1). Le but de cet exercice est de clarifier cette question. On note $\mathcal{F}_A := \{A \cap B;\ B \in \mathcal{F}\}$.

1) Vérifier que $\mathcal{F}_A$ est une tribu sur A (tribu trace). Par construction $\mathcal{F}_A \subset \mathcal{F}$, donc la restriction μ_A de μ à $\mathcal{F}_A$ est bien définie (noter que $\mathcal{F}_A$ n'est pas une *sous-tribu* de $\mathcal{F}$). Vérifier que μ_A est une mesure sur $(A, \mathcal{F}_A)$.

2) Montrer que pour toute $f \in \mathcal{M}_+(\mathcal{F})$, sa restriction f_A à A appartient à $\mathcal{M}_+(\mathcal{F}_A)$ et que

$$\int_A f_A \,\mathrm{d}\mu_A = \int_\Omega f\mathbf{1}_A \,\mathrm{d}\mu,$$

la première intégrale étant comprise au sens de (1), appliquée à l'espace mesuré $(A, \mathcal{F}_A, \mu_A)$.

Ex 3. *Calcul d'une intégrale par les fonctions étagées*

On munit l'espace $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x + y \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$ de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue λ_2. On considère la fonction borélienne définie sur Ω par $h(x, y) = (x + y)^2$.

1) Construire une suite croissante (h_n) de fonctions étagées qui converge vers h.
2) Calculer $\int_\Omega h_n \, d\lambda_2$.
3) En déduire la valeur de $\int_\Omega h \, d\lambda_2$.

Ex 4. *Un calcul de limite d'intégrale*

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et f une application $\Omega \to \mathbb{R}_+$, mesurable $\mathcal{F}$-Bor$(\mathbb{R}_+)$, telle que $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu > 0$. On pose pour tout $\omega_i n\Omega$,

$$f_n(\omega) := n \sin^2\left(\frac{f(\omega)}{n^{1/3}}\right).$$

1) Justifier la mesurabilité de f_n.

2) Etudier la limite de $f_n(\omega)$ quand n tend vers $+\infty$.

3) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu = +\infty$ (on pourra utiliser le lemme de Fatou).

Ex 5. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite d'applications $\Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$, mesurables $\mathcal{F}$-Bor$(\overline{\mathbb{R}}_+)$. On suppose que f_n converge sur tout Ω vers une fonction f et que la suite des intégrales $\int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu$ converge vers un réel $c > 0$.

1) Montrer que $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu$ est bien défini et appartient à $[0, c]$, mais n'est pas forcément égal à c.

2) Montrer par des exemples que tout $b \in [0, c]$ est une valeur possible pour $\int f \,\mathrm{d}\mu$.

Ex 6. *Retour sur les densités (preuve de la Prop. 3.18 du cours)*

1) Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable et f et g deux applications $\Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$, mesurables $\mathcal{F}$-Bor$(\overline{\mathbb{R}}_+)$. Montrer que $\{f < g\} \in \mathcal{F}$.

2) Justifier la décomposition $\{f < g\} = \cup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$, où $A_n := \{f + 1/n < g\}$. Peut on remplacer l'inégalité stricte par l'inégalité large dans la définition de A_n ?

3) On suppose désormais que f et g vérifient la condition

$$\forall A \in \mathcal{F}, \quad \int_A f \,\mathrm{d}\mu = \int_A g \,\mathrm{d}\mu.$$

On suppose de plus que $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu < +\infty$. Montrer que $\mu(A_n) = 0$ pour tout $n \geq 1$. En déduire que $f = g$ μ-presque partout, *i.e.* que $\mu(\{f \neq g\}) = 0$.

4) Généraliser au cas où il existe dans $\mathcal{F}$ une suite croissante $(\Omega_n)_{n\geq 1}$ de réunion Ω et telle que pour tout $n \geq 1$, $\int_{\Omega_n} f \,\mathrm{d}\mu < +\infty$.

Ex 7. *Un exemple à méditer*

Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$ et Y la variable aléatoire définie sur le même espace Ω par

$$Y(\omega) := \begin{cases} X(\omega) & \text{si} \quad X(\omega) \in [0, 1/4] \cup [3/4, 1]; \\ 1 - X(\omega) & \text{si} \quad X(\omega) \in]1/4, 3/4[. \end{cases}$$

Quelle est la loi de Y ? Trouver la fonction de répartition de la variable aléatoire $Z := X + Y$ et vérifier que Z n'est ni discrète ni à densité.

Ex 8. *Identification de mesures finies*

Soit $\mathcal{C}_b$ l'ensemble des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}$. Soient μ et ν deux mesures finies sur $(\mathbb{R}, \mathrm{Bor}(\mathbb{R}))$. Montrer que si pour toute f de $\mathcal{C}_b$, $\int_\mathbb{R} f \,\mathrm{d}\mu = \int_\mathbb{R} f \,\mathrm{d}\nu$, alors $\mu = \nu$. *Indication :* interpréter la fonction indicatrice d'un intervalle ouvert $]a, b[$ comme la limite d'une suite croissante de fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}$.