Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IFP **Année 2003-2004**

Fiche n° 3

Ex 1. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to (\mathbb{R}, \mathrm{Bor}(\mathbb{R}))$ définie par $f(x) := x^2$.

1) Montrer que $f^{-1}(\mathrm{Bor}(\mathbb{R}))$ est égale à $\mathcal{S} := \{A \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R});\ A = -A\}$.

2) Déterminer les fonctions mesurables de $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ dans $(\mathbb{R}, \mathrm{Bor}(\mathbb{R}))$.

Ex 2. Montrer que toute fonction monotone de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est borélienne.

Ex 3. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions mesurables de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\overline{\mathbb{R}}, \mathrm{Bor}(\overline{\mathbb{R}}))$. Montrer que l'ensemble

$$C := \{\omega \in \Omega;\ \lim_n f_n(\omega) \text{ existe dans } \overline{\mathbb{R}}\}$$

est mesurable (*i.e.* que $C \in \mathcal{F}$).

Ex 4. Soit f une fonction mesurable positive de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\overline{\mathbb{R}}_+, \mathrm{Bor}(\overline{\mathbb{R}}_+))$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\begin{aligned} A_{n,k} &:= f^{-1}\left(\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[\right), \quad 0 \leq k \leq n^2 - 1, \\ A_{n,n^2} &:= f^{-1}\left([n, +\infty]\right), \\ f_n &:= \sum_{k=0}^{n^2} \frac{k}{n} \mathbf{1}_{A_{n,k}}. \end{aligned}$$

1) Montrer que $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite de fonctions mesurables, et étudier sa limite au sens de la convergence simple.

2) La suite $(f_n)_{n\geq 1}$ est-elle croissante ?

Ex 5. On note $[x]$ la partie entière du réel x. Soit X une variable aléatoire réelle ayant pour fonction de répartition F :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \dfrac{\ln(1+x)}{\ln 2} & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

1) Calculer :

$$P\Big(k \leq \frac{1}{X} \leq k + t\Big) \qquad k \in \mathbb{N}^*,\ t \in]0, 1[.$$

2) Soit $Y = \frac{1}{X} - \left[\frac{1}{X}\right]$. Montrer que Y est une variable aléatoire réelle de même loi que X.

Ex 6. Soit F une fonction de répartition. On définit sur $]0,1[$ son *inverse généralisée* F^{-1} par

$$F^{-1}(u) := \inf\{x \in \mathbb{R};\ F(x) \geq u\}, \quad u \in]0,1[.$$

1) Pourquoi a-t-on exclu les cas particuliers $u = 0$ et $u = 1$ de la définition ci-dessus ? Que peut-on dire des limites de F^{-1} en 0 et en 1 ?

2) Pour $u \in]0,1[$, on pose $I_u := \{x \in \mathbb{R};\ F(x) = u\}$. Montrer que I_u est soit un intervalle fermé à gauche, soit l'ensemble vide.

3) Donner la construction graphique de $F^{-1}(u)$ dans chacun des cas possibles pour I_u : $I_u = \emptyset$, $I_u = \{x_0\}$, $I_u = [x_0, x_1[$, $I_u = [x_0, x_1]$.

4) Représenter F^{-1} lorsque F est en escaliers.

5) Montrer que les inégalités $F^{-1}(u) \leq x$ et $u \leq F(x)$ sont équivalentes en justifiant chacune des implications ci-dessous. Dans un sens,

$$u \leq F(x) \Rightarrow F^{-1}(u) \leq x.$$

Dans l'autre sens,

$$F^{-1}(u) \leq x \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, F(x+\varepsilon) \geq u \Rightarrow F(x) \geq u.$$

6) Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F et U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$. Montrer que X et $F^{-1}(U)$ ont même loi.

7) Le résultat précédent permet de ramener la *simulation* informatique d'une variable aléatoire X de loi donnée à celle d'une variable U de loi uniforme (à condition que l'on dispose d'un bon algorithme de calcul de F^{-1}). Les générateurs de nombres aléatoires fournissent tous la simulation de U. Expliquer comment simuler un variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre a à partir du générateur de la loi uniforme.

Ex 7. *La loi multinomiale*

1) Montrer que le nombre N de façons de répartir une population de n individus en k groupes d'effectifs respectifs $n_1, \dots, n_k$ où $n_1 + \cdots + n_k = n$ est :

$$N = \frac{n!}{n_1! \dots n_k!}.$$

2) En déduire la formule du multinôme : $\forall (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{R}^k$:

$$(a_1 + \cdots + a_k)^n = \sum_{n_1 + \cdots + n_k = n} \frac{n!}{n_1! \dots n_k!} a_1^{n_1} \dots a_k^{n_k}.$$

Indication : Considérer le premier membre comme un produit de n facteurs et examiner la forme générale d'un terme du développement de ce produit.

3) Soient $p_1, \dots, p_k$ des réels positifs tels que $p_1 + \cdots + p_k = 1$.

a) Montrer que l'on définit bien une loi de probabilité sur $\mathbf{N}^k$ en posant :

$$P(\{(n_1,\dots,n_k)\}) = \begin{cases} 0 & \text{si } n_1+\dots+n_k \neq n, \\ \frac{n!}{n_1!\dots n_k!}\, p_1^{n_1}\dots p_k^{n_k} & \text{si } n_1+\dots+n_k = n. \end{cases}$$

On dit que P est la loi multinomiale de paramètres $(n, p_1, \dots, p_k)$.

b) Soit $X = (X_1, \dots, X_k)$ un vecteur aléatoire discret à valeurs dans $\mathbf{N}^k$, suivant la loi multinomiale P définie ci-dessus. Montrer que X_i suit la loi binomiale de paramètres n, p_i.

c) Montrer que $X_1 + X_2$ suit la loi binomiale de paramètres $n, (p_1 + p_2)$. Généraliser au cas de : $Y = \sum_{i \in I} X_i$ où I est une partie non vide de $\{1, \dots, k\}$.

d) On effectue une série de n épreuves répétées dans des conditions identiques avec pour chacune d'elles k résultats possibles de probabilités respectives $p_1, \dots, p_k$. On note X_l le nombre total de résultats du type $l, (1 \leq l \leq k)$. Quelle est la loi de $(X_1, \dots, X_k)$?

4) On lance $6n$ fois un dé, quelle est la probabilité d'obtenir exactement n fois chacune des faces ? Majorer cette probabilité à l'aide de la formule de Stirling :

$$\forall n \geq 1, \qquad n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n \mathrm{e}^{-n} \mathrm{e}^{\theta_n}, \qquad \frac{1}{12n+1} < \theta_n < \frac{1}{12n}.$$

Application numérique : $n = 100$.

Ex 8. *Loi uniforme sur un borélien*

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ une espace probabilisé, et B un borélien de $\mathbb{R}^d$ tel que $0 < \lambda_d(B) < +\infty$, λ_d désignant la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. On rappelle que le vecteur aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ suit la loi uniforme sur B si

$$\forall A \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^d), \quad \mathbf{P}(X \in A) = \frac{\lambda_d(A \cap B)}{\lambda_d(B)}.$$

Dans cet exercice, $d = 2$. On note X_1 et X_2 les variables aléatoires réelles composantes du vecteur aléatoire X de loi uniforme sur B.

1) On prend $B = [a, b] \times [c, d]$, vérifier que X_1 et X_2 suivent des lois uniformes (à préciser) sur des boréliens de $\mathbb{R}$.

2) On prend pour B le disque unité : $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$. Montrer que cette fois, X_1 ne suit pas la loi uniforme sur $[-1, 1]$ (projection de B sur l'axe des abscisses). *Indication :* en vous inspirant d'un dessin, montrer que $\mathbf{P}(1/2 < X_1 \leq 1) < 1/4$.

3) On prend pour B le domaine convexe ayant pour frontière le parallélogramme de sommets $(1, 1)$, $(4, 1)$, $(2, 2)$, $(5, 2)$. Déterminer les lois de X_1 et X_2 par leur fonction de répartition.

Note pour les doublants : cet exercice peut et doit se faire sans parler de densité !

Ex 9. *Génération de lois conditionnelles et algorithme du rejet*

Voici une description informelle de l'algorithme du rejet utilisé pour la simulation d'un vecteur aléatoire de loi uniforme sur un borélien B de $\mathbb{R}^d$. On suppose que l'on sait générer une suite de vecteurs aléatoires $(M_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ indépendants et de même loi uniforme sur un borélien C contenant B. C'est le cas notamment si B est borné en prenant pour C un pavé. On assimilera pour la commodité du langage le vecteur $M_k(\omega)$ à un point de $\mathbb{R}^d$. On obtient ainsi une suite $(M_k(\omega))$ de points de C. Partant de $k = 1$, tant que $M_k(\omega)$ n'appartient pas à B, on le rejette et on passe à $M_{k+1}(\omega)$. On garde le premier point de cette suite qui appartienne à B. Le point aléatoire ainsi obtenu suit la loi uniforme sur B. Le but de cet exercice est de justifier mathématiquement cet algorithme.

Concernant l'indépendance d'une suite (M_n) de vecteurs aléatoires dont l'étude systématique n'a pas encore été vue en cours, il suffit de savoir qu'elle signifie que pour toute partie finie I de $\mathbb{N}^*$ et toute famille $(A_i;\ i\in I)$ de boréliens de $\mathbb{R}^d$, les évènements $\{M_i \in A_i\}$, $i \in I$ sont mutuellement indépendants au sens du cours de DEUG. On suppose désormais que $(M_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de vecteurs aléatoires $\Omega \to \mathbb{R}^d$, indépendants et de même loi μ telle que $\mu(B) > 0$ (dans les deux dernières questions on prendra pour μ la loi uniforme sur C).

1) Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose

$$T(\omega) := \inf\{i \in \mathbb{N}^*;\ M_i(\omega) \in B\},$$

avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$. T est donc le numéro du premier point « tombé » dans B. Montrer que T est une variable aléatoire discrète positive et donner sa loi (vérifier au passage que $\mathbf{P}(T = +\infty) = 0$).

2) On définit $M_T : \Omega \to \mathbb{R}^d$ par

$$M_T(\omega) := \begin{cases} M_{T(\omega)}(\omega) & \text{si } T(\omega) < +\infty, \\ 0 & \text{si } T(\omega) = +\infty. \end{cases}$$

Montrer que M_T est bien un vecteur aléatoire (attention, M_T n'est pas l'un des vecteurs aléatoires M_k, il est doublement aléatoire...).

3) Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^d)$, calculer $\mathbf{P}(M_k \in A \cap B \mid T = k)$.

4) Prouver que $\mathbf{P}(M_T \in A) = \mathbf{P}(M_1 \in A \mid M_1 \in B)$ *Indication :* $\mathbf{P}(M_T \in A) = \mathbf{P}(M_T \in A \cap B \text{ et } T < +\infty)$. Calculer cette probabilité en conditionnant par les évènements $\{T = k\}$.

5) On suppose désormais que B et C sont deux boréliens tels que $B \subset C$ et $0 < \lambda_d(B) < \lambda_d(C) < +\infty$ et que μ est la loi uniforme sur C. Quelle est la loi de M_T ?

6) Que vaut l'espérance de T ? Comment a-t-on intérêt à choisir C si l'on est soucieux du coût de l'algorithme ? Pour fixer les idées, on prendra $d = 2$, pour B le disque unité et pour C un rectangle à côtés parallèles aux axes.