Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IFP **Année 2003-2004**

Fiche 2

Ex 1. *Tribu engendrée par une partition*

1) Soit I un ensemble d'indices fini ou dénombrable et $\Pi = \{A_i; i \in I\}$ une *partition* de l'ensemble Ω. En adoptant la convention qu'une union indexée par $\emptyset$ est elle même vide, démontrer que la tribu sur Ω engendrée par Π est

$$\sigma(\Pi) = \Big\{ \bigcup_{i \in J} A_i;\ J \subset I \Big\}.$$

2) On prend désormais $\Omega = [0,1[^2$ et pour tout entier $n \geq 1$, on note $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par la partition

$$\Pi_n = \left\{ \left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right[\times \left[\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}\right[;\ 1 \leq i,j \leq 2^n \right\}.$$

Vérifier que $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante de tribus.

3) Ainsi pour tout n, $\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i$ est une tribu. Peut-on en dire autant de $\mathcal{G} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} \mathcal{F}_i$?
Indication : $[0,1/3[^2 \notin \mathcal{G}$

4) Soit $D = \{(x,y) \in \Omega;\ x^2 + y^2 < 1\}$. Montrer que D est dans $\sigma(\mathcal{G})$.

Ex 2. Soit f une application de E dans E et

$$\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{P}(E)\ ;\ f^{-1}(f(A)) = A\}.$$

Montrer que $\mathcal{F}$ est une tribu sur E.

Ex 3. Soit f une bijection de E dans E et

$$\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{P}(E)\ ;\ x \in A \Longrightarrow f(x) \in A \text{ et } f^{-1}(x) \in A\}.$$

Montrer que $\mathcal{F}$ est une tribu sur E.

Ex 4. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $\mathcal{T}$ la classe des parties $\mathcal{A}$-mesurables de Ω qui sont μ-négligeables ou dont le complémentaire est μ-négligeable.

1) Démontrer que $\mathcal{T}$ est une sous-tribu de $\mathcal{A}$.

2) Démontrer qu'une application f de Ω dans $\mathbb{R}$ est $\big(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$-mesurable (c'est-à-dire telle que $f^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) \subseteq \mathcal{T}$) si et seulement si elle est μ-presque partout constante.

Ex 5. 1) Soit P une mesure de probabilité sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ne prenant que les valeurs 0 et 1. Démontrer que c'est une mesure de Dirac. *Indication* : On montrera qu'il existe un unique entier n tel que $P\big(]n, n+1]\big) = 1$, puis une suite décroissante de sous-intervalles emboîtés de $]n, n+1]$ de probabilité 1, dont la longueur tend vers 0.

2) Étendre ce résultat aux espaces métriques *séparables* munis de leur tribu borélienne (facultatif).

Ex 6. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Démontrer que

$$\mathcal{C} = \{A \,;\; A \in \mathcal{A},\, \mu(A) < +\infty\}$$

est un π-système engendrant la tribu $\mathcal{A}$ si la mesure μ est σ-finie.

Ex 7. Donner une partition $(B_n,\, n \geq 1)$ de $\mathbb{R}$ formée de boréliens de mesure de Lebesgue infinie.

Ex 8. Démontrer que $\lambda\Big(\big(\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}[n^3 - 5^{-n}, n^3 + 5^{-n}]\big) \cap \big(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\big)\Big) = \dfrac{1}{2}$

Ex 9. Soit B un borélien de $\mathbb{R}$ de mesure de Lebesgue > 0.

1) Démontrer que B contient au moins deux points x et y tels que $|x - y|$ soit irrationnel.

2) Démontrer que si B est borné, il contient au moins deux points distincts u et v tels que $|u - v|$ soit rationnel. Étendre ce résultat au cas non borné.

Ex 10. Appelons développement décimal de tout nombre x de [0,1[l'unique représentation de x sous la forme

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n},$$

où $a_n \in \{0, \ldots, 9\}$, $n \geq 1$, et où $\liminf\limits_{n \to +\infty} a_n < 9$. Quelle est la mesure de Lebesgue de l'ensemble E des éléments de $[0, 1[$ dont le développement décimal s'écrit sans le chiffre 7 ? de l'ensemble F des éléments dont le développement décimal ne peut s'écrire sans le chiffre 7 ?

Ex 11. *Ensemble triadique de Cantor*
Soit

$$B'_n := \bigcup_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{3^n - 1} \left[\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n}\right], \qquad B_n := \bigcap_{i \leq n} B'_i \qquad C := \bigcap_{n \geq 0} B_n.$$

1) Montrer que C est un compact de $\mathbb{R}$ de mesure nulle.

2) Montrer que

$$C = \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{3^k} \,;\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad a_k \in \{0, 2\} \right\}.$$

3) Montrer que C est d'intérieur vide et sans point isolé.

4) Montrer que C a la puissance du continu.

Ex 12. On considère l'intervalle $[0,1]$ muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}([0,1])$ et de la mesure de Lebesgue λ.

1) Démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un ouvert O dense dans $[0,1]$ et de mesure $\lambda(O) < \varepsilon$.

2) En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un fermé F d'intérieur vide et de mesure $\lambda(F) \geq 1 - \varepsilon$.

3) Existe-t-il un fermé d'intérieur vide et de mesure 1 ? (facultatif)

Ex 13. *Aires de courbes*

1) Démontrer que la mesure de Lebesgue λ_2 d'un segment quelconque de $\mathbb{R}^2$ est nulle en utilisant un recouvrement par de petits pavés. En déduire que l'aire de toute droite est de mesure λ_2 nulle.

2) Soit f est une fonction $[0,1] \to \mathbb{R}$ hölderienne d'exposant α $(0 < \alpha \leq 1)$, ce qui signifie qu'il existe une constante C telle que

$$\forall s,t \in [0,1], \quad |f(t) - f(s)| \leq C|t-s|^\alpha.$$

En utilisant la même méthode de recouvrement que précédemment, démontrer que son graphe

$$G(f) = \{(x,y) \in [0,1] \times \mathbb{R};\ y = f(x)\}$$

est de mesure λ_2 nulle. En déduire de nouveau que la mesure λ_2 de toute droite qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées est nulle.

Ex 14. Soit λ_2 la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$.

1) Démontrer que λ_2 est invariante par translation, par symétrie par rapport à la droite $x'x$ et par symétrie par rapport à l'origine.

2) Démontrer que la mesure d'un segment est nulle.

3) Calculer la mesure d'un triangle rectangle ayant 2 côtés parallèles aux axes, puis de tout triangle rectangle.

4) Calculer la mesure d'un rectangle quelconque.

5) Démontrer que λ_2 est invariante par isométrie.

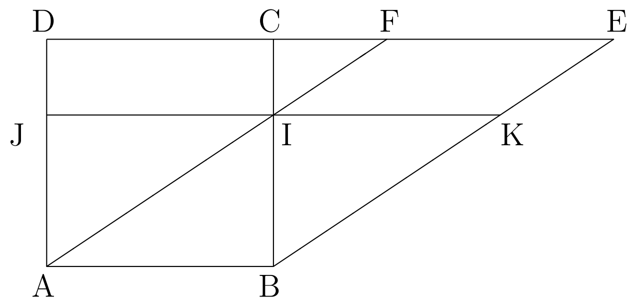
Ex 15. *Euclide et l'aire d'un parallélogramme*
Dans le *Livre I* des *Éléments* d'Euclide, on trouve la proposition suivante :

> « Les parallélogrammes, construits sur la même base et entre les mêmes parallèles, sont égaux entre eux[1]. »

Ici *égaux entre eux* signifie *de même aire*. Le but de cet exercice est de retrouver cette proposition avec la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^2$ et d'en déduire la formule donnant l'aire d'un parallélogramme.

[1] cf. J. Dhombres, *Nombre, mesure et continu. Épistomologie et histoire.*, CEDIC/NATHAN 1978, p. 73.

1) En utilisant l'invariance par translation de la mesure de Lebesgue, démontrer que les parallélogrammes $ABCD$ et $ABEF$ (cf. figure ci-dessous) ont même mesure de Lebesgue. *Indication* : On comparera d'abord les parallélogrammes $ABIJ$ et $ABKI$.



2) En déduire l'aire du parallélogramme $ABEF$ en fonction des longueurs de ses côtés et de l'angle $\alpha = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF})$. On considèrera comme acquis dans cet exercice que la mesure de Lebesgue d'un rectangle de $\mathbb{R}^2$ est égale au produit longueur par largeur, qu'il soit ou non à côtés parallèles aux axes (voir l'exercice précédent).

Ex 16. *Volumes de simplexes*
Soit λ_3 la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^3$ et posons

$$T_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ 0 < x < y < z < 1\}.$$

1) Démontrer que la mesure de $\{(x, y, z) \in]0, 1[^3;\ x = y\}$ est nulle.
2) Calculer $\lambda_3(T_3)$.
3) Reprendre l'exercice en dimension $d \geq 3$.
4) Si a et b sont deux réels ($a \leq b$), on note

$$T_d(a, b) = \{(x_1, \dots, x_d);\ a < x_1 < x_2 < \cdots < x_d < b\}.$$

Calculer $\lambda_d\big(T_d(a, b)\big)$.

Ex 17. *Aires de courbes (suite)*
Soit f une fonction *bornée* $[a, b] \to \mathbb{R}$. On suppose de plus que le graphe $G(f)$ est un *borélien* de $\mathbb{R}^2$.

1) Démontrer que $\lambda_2\big(G(f)\big) = 0$. *Indication* : considérer la suite des translatés $G_n = G(f + 1/n)$ et majorer la mesure de leur réunion.
2) Comparer la généralité de ce résultat avec celui de l'exercice 13.

Ex 18. Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable tels que tous les singletons soient mesurables, c'est-à-dire, pour tout x dans E, $\{x\}$ est dans $\mathcal{A}$. On dit qu'une mesure μ sur $\mathcal{A}$ est diffuse si elle ne charge aucun singleton, c'est-à-dire, pour tout x dans E, on a $\mu(\{x\}) = 0$.

1) Montrer que la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^d$ est diffuse.

2) Montrer que si μ est diffuse, tous les ensembles dénombrables sont de mesure nulle.

3) Montrer que toute mesure σ-finie sur $(\Omega, \mathcal{A})$ peut se décomposer en la somme d'une mesure diffuse et d'une suite finie ou dénombrable de masses ponctuelles.

4) Montrer que si une mesure est bornée, il existe un singleton dont la mesure est supérieure ou égale à celle des autres singletons. Montrer que ceci n'est pas forcément vrai si la mesure est seulement σ-finie.

Ex 19. Soit Ω un ensemble dont le cardinal est strictement supérieur au dénombrable.

1) Montrer que la plus petite tribu $\mathcal{A}$ engendrée sur Ω par la classe des singletons est la classe des ensembles qui sont soit dénombrable soit de complémentaire dénombrable. Dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}$, comparer $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

2) Pour A dans $\mathcal{A}$, on pose $\Pi(A) = 0$ si A est dénombrable et $\Pi(A) = 1$ si A^c est dénombrable. Montrer que ceci définit une probabilité Π sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Ex 20. Soient f_1, f_2, g_1, g_2, des fonctions numériques mesurables. Montrer que si $f_1 = g_1$ μ-p.p. et $f_2 = g_2$ μ-p.p., alors $f_1 + f_2 = g_1 + g_2$ μ-p.p.

Ex 21. Soient (f_n) et (g_n) deux suites de fonctions mesurables de $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ dans $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ qui vérifient, pour tout n de $\mathbf{N}$, $f_n = g_n$ μ-p.p. On pose $f = \sup_n f_n$ et $g = \sup_n g_n$. A-t-on $f = g$ μ-p.p. ?

Ex 22. Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Trouver toutes les fonctions *continues* sur $[0, 1]$ nulles λ-p.p. sur $]0, 1[$. Le résultat subsiste-t-il si on remplace *continues* par *boréliennes* ?

Ex 23. Comparer l'ensemble $\mathcal{C}$ des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues λ-p.p. et l'ensemble $\mathcal{E}$ des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ égales λ-p.p. à une fonction continue.