

Fiche 1

Ex 1. Soit $(u_{n,k}; (n,k) \in \mathbb{N}^2)$ une suite double de réels positifs. Montrer l'inégalité

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^{+\infty} u_{n,k} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \sup_{n \in \mathbb{N}} u_{n,k} \quad \text{dans } \overline{\mathbb{R}}^+$$

et donner un exemple où elle est stricte.

Ex 2. 1) Rappeler la définition des limites supérieures et inférieures d'une suite (u_n) de réels. Montrer que pour toute suite (u_n) , $\liminf u_n \leq \limsup u_n$ et qu'il y a égalité si et seulement si la suite u_n converge dans $\overline{\mathbb{R}}$.

2) Montrer les équivalences

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \limsup_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \ell| = 0; \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty &\Leftrightarrow \liminf_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty; \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty &\Leftrightarrow \limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty. \end{aligned}$$

3) Soit (u_n) une suite de réels. On pose $a = \liminf u_n$ et $b = \limsup u_n$. Montrer qu'il existe une sous-suite de (u_n) qui converge vers a et une sous-suite qui converge vers b .

Ex 3.

Soient (a_n) et (b_n) deux suites d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$.

1) Montrer que $\limsup_{n \rightarrow +\infty} (-a_n) = -\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

2) Montrer que $\limsup_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow +\infty} b_n$, à condition qu'aucune des sommes concernées ne soit de la forme « $\infty - \infty$ ». Donner un exemple montrant que l'inégalité peut être stricte.

3) Lorsque $a_n \leq b_n$ pour tout n , montrer que $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} b_n$. donner un exemple où les limites inférieures sont égales, bien que $a_n < b_n$ pour tout n .

Ex 4. On note p_k le k -ième nombre premier ($p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots$). On pose :

$$P_k := \{p_k^l, l \in \mathbb{N}^*\}, \quad P := \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} P_k.$$

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

- Si $n \notin P$, $u_n := \frac{3}{4}$,
- Si $n \in P_k$, avec $n = p_k^l$, $u_n := \frac{p_k}{1 + p_k} + \frac{1}{n}$.

- 1) Expliquer pourquoi la définition de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est cohérente.
- 2) Trouver $\liminf u_n$ et $\limsup u_n$.

Ex 5. Cardinalité

1) Montrer que l'ensemble des nombres réels dyadiques (*i.e.* de la forme $k2^{-n}$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$) est dénombrable.

2) Montrer qu'une union dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable.

Ex 6. A REVOIR (2) et (3) égalité)

Soient f et g deux applications de Ω dans \mathbb{R} . Prouvez les inclusions suivantes.

- 1) $\{\omega \in \Omega; f(\omega) + g(\omega) \geq \varepsilon\} \subset \left\{\omega \in \Omega; f(\omega) \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{\omega \in \Omega; g(\omega) \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}$.
- 2) $\{\omega \in \Omega; \max(f(\omega), g(\omega)) \geq \varepsilon\} \subset \left\{\omega \in \Omega; f(\omega) \geq \varepsilon\right\} \cup \left\{\omega \in \Omega; g(\omega) \geq \varepsilon\right\}$.
- 3) $\{\omega \in \Omega; \min(f(\omega), g(\omega)) \geq \varepsilon\} \supset \left\{\omega \in \Omega; f(\omega) \geq \varepsilon\right\} \cap \left\{\omega \in \Omega; g(\omega) \geq \varepsilon\right\}$.

Ex 7. On effectue une suite infinie de tirages du loto. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$A_i := \{\text{Sortie de la boule n° 13 au } i\text{-ième tirage}\}.$$

1) Exprimer à l'aide d'opérations ensemblistes sur les A_i l'évènement « le n° 13 sort pour la première fois au cinquième tirage ».

2) Définir par une phrase ne comportant aucun vocabulaire mathématique chacun des évènements :

$$E_1 := \bigcap_{i=5}^{+\infty} A_i, \quad E_2 := \left(\bigcap_{i=1}^4 A_i^c\right) \cap \left(\bigcap_{i=5}^{+\infty} A_i\right), \quad E_3 := \bigcup_{i>4} A_i, \quad E_4 := \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_{2i}^c.$$

3) On pose $C_n = \bigcap_{i>n} A_i$. Montrer que la suite (C_n) est croissante (*i.e.* que pour tout $n \geq 1$, C_n est inclus dans C_{n+1}). Caractériser d'une phrase ne comportant pas de vocabulaire mathématique l'évènement $C := \bigcup_{n \geq 1} C_n$.

4) Écrire à l'aide des A_i les événements :

$$B_n := \{\text{Le n}^\circ 13 \text{ sort au moins une fois au delà du } n\text{-ième tirage}\}$$

$$B := \{\text{Sur l'ensemble des tirages, le n}^\circ 13 \text{ sort une infinité de fois}\}$$

Ex 8. Soient a, b deux réels ($a < b$). Chacun des ensembles E_i ci-dessous est un intervalle. Identifiez le et justifiez votre réponse.

$$E_1 := \bigcap_{n \geq 1} \left[a, b + \frac{1}{n} \right], \quad E_2 := \bigcap_{n \geq 1} \left[a - \frac{1}{n}, b + 2^{-n} \right],$$

$$E_3 := \bigcup_{n \geq 1} \left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n} \right], \quad E_4 := \bigcup_{n \geq 1} \left[a + \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n} \right].$$

Ex 9. Soit f une fonction $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Justifiez l'égalité :

$$\{\omega \in \Omega; f(\omega) > 0\} = \bigcup_{n \geq 1} \{\omega \in \Omega; f(\omega) \geq 1/n\}.$$

Ex 10. On considère une suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\omega \mapsto f_n(\omega)$. On pose pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$B_{\varepsilon, k} = \{\omega \in \Omega; |f_k(\omega)| < \varepsilon\}.$$

1) On fixe $\varepsilon > 0$. Ecrire à l'aide d'opérations ensemblistes sur les $B_{\varepsilon, k}$, l'ensemble :

$$A_{\varepsilon, n} = \{\omega \in \Omega; \forall k \geq n, |f_k(\omega)| < \varepsilon\}.$$

2) Même question pour :

$$A_\varepsilon = \{\omega \in \Omega; \exists n(\omega), \forall k \geq n(\omega), |f_k(\omega)| < \varepsilon\}.$$

3) Montrer que l'ensemble :

$$A = \{\omega \in \Omega; \lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(\omega) = 0\}$$

peut s'écrire à l'aide d'opérations ensemblistes sur *une suite* d'ensembles du type $B_{\varepsilon, k}$.

Ex 11. *Le théorème de convergence dominée pour les séries*

On considère une suite double de réels $(u_{n,k}; (n, k) \in \mathbb{N}^2)$ et une suite de réels $(a_k; k \in \mathbb{N})$ vérifiant les hypothèses suivantes.

a) $\forall (n, k) \in \mathbb{N}^2, |u_{n,k}| \leq a_k$.

b) $\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n,k} = u_k \in \mathbb{R}$.

c) $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k < +\infty$.

- 1) Montrer que les séries $\sum_{k=0}^{+\infty} u_{n,k}$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ convergent absolument dans \mathbb{R} .
- 2) Vérifier que pour tout entier N ,

$$\left| \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{+\infty} u_{n,k} \right| \leq \left| \sum_{k=0}^{N-1} (u_k - u_{n,k}) \right| + 2 \sum_{k=N}^{+\infty} a_k.$$

- 3) Prouver que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} u_{n,k} = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n,k}.$$

- 4) Donner un exemple de suite double $(u_{n,k}; (n, k) \in \mathbb{N}^2)$ vérifiant b) et telle que pour tout n la série $\sum_{k=0}^{+\infty} u_{n,k}$ converge absolument dans \mathbb{R} , mais pour laquelle la conclusion de la question précédente est en défaut.

Ex 12. Pour tout réel $\lambda > 0$, on considère la série $S(\lambda)$ suivante :

$$S(\lambda) := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!},$$

ainsi que son reste d'ordre n , $R_n(\lambda)$ défini par :

$$\begin{aligned} R_n(\lambda) &:= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \\ &= \frac{e^{-\lambda} \lambda^{n+1}}{(n+1)!} \left(1 + \frac{\lambda}{n+2} + \frac{\lambda^2}{(n+2)(n+3)} + \frac{\lambda^3}{(n+2)(n+3)(n+4)} + \dots \right). \end{aligned}$$

- 1) Rappeler brièvement pourquoi la série S converge pour tout λ . Que vaut sa somme ?
- 2) Justifiez la majoration suivante valable pour tout entier $n > \lambda - 2$:

$$R_n(\lambda) \leq \frac{e^{-\lambda} \lambda^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{n+2}}.$$

- 3) Vérifier que la suite $(u_n)_{n > \lambda - 2}$ définie par :

$$u_n := \frac{\lambda(n+2)}{(n+1)(n+2-\lambda)}, \quad n > \lambda - 2$$

est décroissante et en déduire que pour tout $n \geq 2\lambda - 1$,

$$R_n(\lambda) < \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!}.$$

- 4) Pouvez vous proposer une traduction probabiliste de ce résultat ?

5) Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} R_n(\lambda)$ converge pour tout $\lambda > 0$.

6) Calculer sa somme. *Indication* : on pourra considérer la série double de terme général $w_{n,k}$, $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ donné par :

$$w_{n,k} = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} & \text{si } k > n, \\ 0 & \text{si } 0 \leq k \leq n. \end{cases}$$

Ex 13. On suppose que P et Q sont deux probabilités sur (Ω, \mathcal{F}) vérifiant $P \leq Q$, ce qui signifie : $\forall A \in \mathcal{F}, P(A) \leq Q(A)$. Montrer qu'alors $P = Q$ (égalité de deux fonctions d'ensembles).

Ex 14. Soit $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite d'événements ayant chacun une probabilité 1 (on rappelle que $P(A_n) = 1$ n'implique pas $A_n = \Omega$). On note A leur intersection. Que peut-on dire de $P(A)$?

Ex 15. Sur la probabilité qu'un entier tiré au hasard soit un multiple...

On a vu qu'il n'existe pas de probabilité uniforme sur \mathbb{N} . L'objet de cet exercice est de donner une réponse négative à la question moins naïve suivante : existe-t-il une probabilité P sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ telle qu'un entier tiré au hasard suivant cette loi P soit pair avec une probabilité $1/2$, multiple de 3 avec une probabilité $1/3$, multiple de 4 avec probabilité $1/4$, etc. Plus formellement, notons $n\mathbb{N}$ l'ensemble des multiples de l'entier n (y compris 0). On suppose qu'il existe une probabilité P vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(n\mathbb{N}) = \frac{1}{n}.$$

et on souhaite réfuter cette conjecture.

- 1) Montrer que nécessairement $P(\{0\}) = 0$.
- 2) Prouver la relation

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{-1} = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{k_1+k_2=m} \frac{1}{2^{k_1} 3^{k_2}}.$$

3) Soit p_i le i -ème nombre premier ($p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots$). On pose pour $1 \leq k \leq n$:

$$\pi_{k,n} = \prod_{i=k}^n \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

et on se propose d'en trouver la limite lorsque n tend vers $+\infty$, k restant fixé. Justifier les écritures suivantes :

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)^{-1} &= \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{k_1+\dots+k_n=l} \frac{1}{p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n}} \\ &\geq \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}. \end{aligned}$$

- 4) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \pi_{1,n}$, puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} \pi_{k,n}$ (k fixé).

5) Montrer que si les entiers a et b sont premiers entre eux :

$$P(a\mathbb{N} \cap b\mathbb{N}) = P(a\mathbb{N})P(b\mathbb{N}).$$

En déduire

$$P(a\mathbb{N}^c \cap b\mathbb{N}^c) = P(a\mathbb{N}^c)P(b\mathbb{N}^c).$$

6) On note pour alléger $E_i = p_i\mathbb{N}$. Montrer que pour tout $n \geq 2$,

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n E_i^c\right) = \prod_{i=1}^n P(E_i^c).$$

En déduire la valeur de $P\left(\bigcap_{i=k}^{+\infty} E_i^c\right)$ pour tout $k \geq 1$.

7) Montrer que $P\left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} E_i\right) = 1$ pour tout k et en déduire que

$$P(\{0, 1, \dots, k-1\}) = 0 \quad \text{pour tout } k,$$

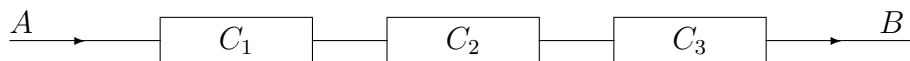
ce qui est manifestement absurde (pourquoi?).

Ex 16. On se propose de calculer la probabilité de fonctionnement de quelques circuits électriques simples à l'aide des probabilités de fonctionnement de leurs composants. Dans tout ce qui suit, les composants ont des fonctionnements *mutuellement indépendants*. On note p_i la probabilité de fonctionnement du composant C_i et F_i l'événement :

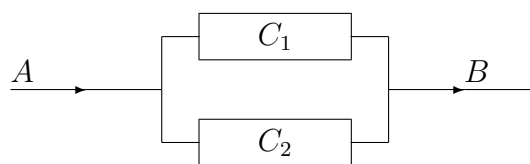
$$F_i = \{\text{le composant } C_i \text{ fonctionne}\}.$$

On dit que le circuit fonctionne si le courant peut passer du point A au point B .

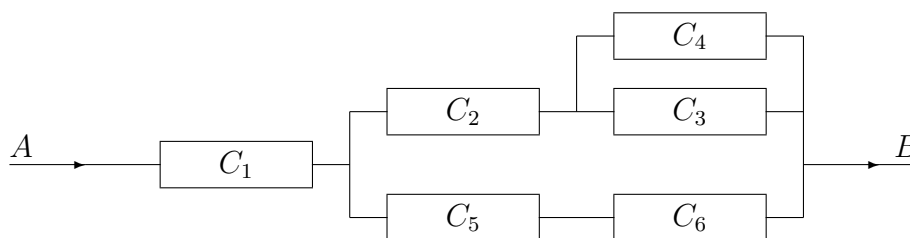
1) *Circuit série* : Calculer la probabilité de fonctionnement du circuit suivant :



2) *Circuit parallèle* : Calculer la probabilité de fonctionnement du circuit suivant :



3) *Circuit mixte* : Calculer la probabilité de fonctionnement du circuit suivant lorsque tous les p_i sont égaux à p .



Ex 17. *Le gardien ivre*

Un voleur se cache pour observer un veilleur de nuit ouvrir une porte. Il sait que le gardien est ivre un jour sur trois. Celui-ci a un trousseau de 10 clés. Les soirs d'ivresse, il essaie une clé au hasard, la remet si elle n'ouvre pas la porte, et recommence, en essayant éventuellement plusieurs fois la même. . .Lorsqu'il est à jeun au contraire, il prend soin de séparer les clés déjà essayées.

La porte ayant été ouverte au huitième essai, le voleur en déduit que le veilleur de nuit est ivre et décide de tenter son coup. Quelle probabilité a-t-il de se tromper ? Que penser de la stratégie du voleur ?

Ex 18. On effectue des lancers répétés d'une paire de dés et on observe pour chaque lancer la *somme* des points indiqués par les deux dés. On se propose de calculer de deux façons la probabilité de l'événement E défini ainsi : *dans la suite des résultats observés, la première obtention d'un 9 a lieu avant la première obtention d'un 7.*

- 1) Quelle est la probabilité de n'obtenir ni 7 ni 9 au cours d'un lancer ?
- 2) *Première méthode* : On note $F_i = \{\text{obtention d'un 9 au } i\text{-ème lancer}\}$ et pour $n > 1$, $E_n = \{\text{ni 7 ni 9 ne sont obtenus au cours des } n-1 \text{ premiers lancers et le } n\text{-ième lancer donne 9}\}$. Dans le cas particulier $n = 1$, on pose $E_1 = F_1$.
 - a) Exprimer E à l'aide d'opérations ensemblistes sur les E_n ($n \geq 1$). Exprimer de même chaque E_n à l'aide des F_i et des $H_i = \{\text{ni 7 ni 9 au } i\text{-ème lancer}\}$.
 - b) Calculer $P(E_n)$ en utilisant l'indépendance des lancers.
 - c) Calculer $P(E)$.
- 3) *Deuxième méthode* : On note $G_1 = \{\text{obtention d'un 7 au premier lancer}\}$.
 - a) Donner une expression de $P(E)$ en utilisant le conditionnement par la partition $\{F_1, G_1, H_1\}$.
 - b) Donner sans calcul les valeurs de $P(E | F_1)$, $P(E | G_1)$ et expliquer pourquoi $P(E | H_1) = P(E)$.
 - c) En déduire la valeur de $P(E)$.

Ex 19. On rappelle que si A est un événement, la variable aléatoire indicatrice de A est la fonction définie sur Ω par :

$$\mathbf{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Autrement dit, $\mathbf{1}_A$ vaut 1 si A est réalisé et 0 sinon.

Soit $(A_i)_{i \geq 1}$ une suite d'événements *indépendants*. On note $p_i = P(A_i)$ et on suppose que :

$$a := \sum_{i=1}^{+\infty} p_i < +\infty.$$

Le but de cet exercice est de prouver l'inégalité

$$\forall n, k \in \mathbb{N}^*, \quad P\left(\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_i} \geq k\right) \leq \frac{a^k}{k!}.$$

La dernière question propose une application de cette inégalité.

- 1) Que peut-on dire du cas $k > n$? On suppose dans la suite $k \leq n$.
- 2) On note $B_{n,k} := \{\omega \in \Omega; \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_i}(\omega) \geq k\}$. Justifier l'inclusion

$$B_{n,k} \subset \bigcup_{\substack{F \subset \{1, \dots, n\} \\ \text{card } F = k}} \bigcap_{i \in F} A_i.$$

- 3) En déduire que

$$P(B_{n,k}) \leq \sum_{\substack{F \subset \{1, \dots, n\} \\ \text{card } F = k}} \prod_{i \in F} p_i.$$

- 4) On note $a_n = \sum_{i=1}^n p_i$. Montrer que

$$a_n^k \geq k! \sum_{\substack{F \subset \{1, \dots, n\} \\ \text{card } F = k}} \prod_{i \in F} p_i.$$

Indication : On remarquera que

$$a_n^k = \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in \{1, \dots, n\}^k} p_{i_1} \cdots p_{i_k}.$$

- 5) Conclure.

6) *Application à un problème de tir.* Dans un stand de tir, une cible mobile traverse le champ visuel d'un tireur (une traversée par épreuve). À chaque épreuve, le tireur tire un coup sur la cible. D'une épreuve à la suivante, la vitesse de la cible augmente de 20%. On suppose que pour un tireur donné, la probabilité de toucher la cible est *inversement proportionnelle* à la vitesse de la cible. Elle vaut ainsi $p \in]0, 1[$ pour le premier tir, $\frac{5}{6}p$ pour le second (pourquoi?), etc. Les tirs sont supposés indépendants, le tireur dispose d'autant de cartouches qu'il le souhaite et le défi qu'il doit relever est celui de toucher au moins 20 fois la cible. En utilisant le résultat démontré ci-dessus, majorer sa probabilité de réussir (indépendamment de p).

Ex 20. L'avancement de certains jeux se fait selon la règle suivante : le joueur lance deux dés et avance son pion d'un nombre de cases donné par la somme des points obtenus. S'il a obtenu un double, il peut rejouer et avancer encore et ainsi de suite tant qu'il obtient des doubles. Après le premier lancer sans double, il passe la main au joueur suivant. On s'intéresse à la somme S des points obtenus par cette procédure par un joueur lors d'un tour. Pour $i \geq 1$, on note D_i l'événement *le i -ème lancer a lieu et donne un double* (on a donc $D_i \subset D_{i-1}$). On note X_i la variable aléatoire égale à 0 si le i -ème lancer n'a pas lieu et à la somme des points du i -ème lancer sinon.

- 1) Donner *brèvement* la loi de X_1 et son espérance.
- 2) Calculer $P(D_1)$, $P(D_i | D_{i-1})$ et trouver une relation de récurrence entre $P(D_i)$ et $P(D_{i-1})$. En déduire l'expression explicite de $P(D_i)$ en fonction de i .

3) Pour $i \geq 2$, donner les valeurs des probabilités conditionnelles

$$P(X_i = k \mid D_{i-1}) \quad \text{et} \quad P(X_i = k \mid D_{i-1}^c),$$

en distinguant les cas $k = 0$ et $k \in \{2, \dots, 12\}$.

4) En déduire une relation simple entre $P(X_i = k)$ et $P(X_1 = k)$ pour $k \in \{2, \dots, 12\}$ puis entre $\mathbf{E}X_i$ et $\mathbf{E}X_1$. Quelle est la loi de X_i ?

5) On pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Montrer que $\mathbf{E}S_n$ converge en croissant vers 8,4 lorsque n tend vers $+\infty$.

6) On note N le nombre aléatoire de lancers effectués selon la procédure ci-dessus. Calculer $P(N \geq n)$ et en déduire que $P(N = +\infty) = 0$. On admet alors que l'on peut remplacer Ω par $\Omega' = \{\omega \in \Omega; N(\omega) < +\infty\}$. C'est ce que nous ferons désormais. On peut alors considérer N comme une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N}^* . Quelle est sa loi ?

7) On définit la variable aléatoire S sur Ω' par :

$$S(\omega) = \sum_{i=1}^{+\infty} X_i(\omega).$$

Notons que puisque ω est dans Ω' , tous les termes de la série sont nuls à partir du rang (aléatoire) $N(\omega) + 1$, il n'y a donc pas de problème de convergence. S est le nombre total de points obtenus, sauf dans le cas où il y a une infinité de lancers. Comme celui-ci a une probabilité nulle, le fait de le laisser tomber n'affecte pas la loi du nombre total de points obtenus qui est donc celle de S .

Après avoir justifié l'inclusion :

$$\{S = k\} \subset \{12N \geq k\},$$

valable pour tout $k \in \mathbb{N}$, montrer que :

$$P(S = k) \leq 36q^k \quad \text{où} \quad q = 6^{-1/12}.$$

En déduire l'existence de $\mathbf{E}S$.

8) On définit sur Ω' la variable aléatoire $R_n = S - S_{n-1}$. Montrer qu'elle vérifie :

$$R_n \leq S \mathbf{1}_{\{S \geq 2n\}}.$$

En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leq \mathbf{E}S - \mathbf{E}S_{n-1} \leq \mathbf{E}(S \mathbf{1}_{\{S \geq 2n\}}).$$

9) Exprimer $\mathbf{E}(S \mathbf{1}_{\{S \geq 2n\}})$ à l'aide des $P(S = k)$ et montrer qu'elle tend vers zéro quand n tend vers l'infini.

10) Conclure.