Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IFP **Année 2003-04**

Examen deuxième session, septembre 2004

Ce sujet comporte **4 pages**, *dont 2 figures.*
Conditions de déroulement de l'épreuve :
Les calculatrices sont interdites.
Liste exhaustive des documents autorisés :

1. Polycopié de DEUG *Introduction au calcul des probabilités.*
2. Polycopié du *cours* d'IFP 2003-2004.
3. Une feuille *manuscrite* recto verso au format standard A4, pouvant contenir des extraits du cours à votre choix, à l'exclusion de tout corrigé d'exercice.

Le barème n'est donné qu'à titre indicatif pour vous aider à gérer votre temps et n'a pas valeur contractuelle.

Ex 1. *Un calcul de série (3 points)*
En fournissant les justifications adéquates, calculer :

$$S := \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} \left(1 - \sqrt{\sin x}\,\right)^k \cos x \,\mathrm{d}x.$$

Ex 2. *Étude d'une fonctionnelle définie par une espérance (9 points)*
On note $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, une variable aléatoire réelle sur cet espace. On pose

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Psi_X(t) := \mathbf{E} \arctan(tX), \tag{1}$$

où arctan désigne la réciproque de la restriction de la fonction tangente à $]-\pi/2, \pi/2[$.

1) Montrer que la fonction Ψ_X est définie sur $\mathbb{R}$ et bornée.

2) Montrer que si X et Y ont même loi, $\Psi_X = \Psi_Y$. Calculer explicitement Ψ_X dans les deux cas particuliers suivants :
a) X suit la loi de Bernoulli de paramètre p ;
b) X suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.

3) Que vaut Ψ_X lorsque la loi de X est *symétrique*, *i.e.* X et $-X$ ont même loi ? Peut-on dire que Ψ caractérise la loi de X, c'est-à-dire que $\Psi_X = \Psi_Y$ (égalité de fonctions sur $\mathbb{R}$) implique $P_X = P_Y$ (X et Y ont même loi) ?

4) Montrer que Ψ_X est continue sur $\mathbb{R}$ (quelle que soit la loi de X).

5) Montrer que

$$\lim_{t\to+\infty} \Psi_X(t) = -\frac{\pi}{2}\mathbf{P}(X<0) + \frac{\pi}{2}\mathbf{P}(X>0). \tag{2}$$

Indiquer brièvement comment s'adapte votre justification pour fournir la limite en $-\infty$.

6) Démontrer les affirmations suivantes

a) Si $\mathbf{E}|X|$ est finie, Ψ_X est dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) Ψ_X reste dérivable sur $\mathbb{R}^*$ même si X n'est pas intégrable.

c) Si X est positive et non intégrable, Ψ_X n'est pas dérivable en 0. *Indication :* on prouvera que si $(t_n)_{n\geq 1}$ est une suite dans $\mathbb{R}^*$, tendant vers 0, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\Psi_X(t_n)}{t_n} = +\infty$.

Ex 3. *Simulation par rapport d'uniformes (6 points)*

Le but de cet exercice est de justifier mathématiquement une méthode de simulation d'une variable aléatoire Y de densité f connue. On suppose que l'on sait simuler un vecteur aléatoire (U, V) de loi uniforme sur le borélien

$$A := \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2;\ 0 < u < f\Big(\frac{v}{u}\Big)^{1/2}\right\}. \tag{3}$$

Alors la variable aléatoire $Y := V/U$ suit la loi de densité f. Cette méthode de simulation est appelée méthode du ratio d'uniformes [1].

On note λ_d la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. On rappelle que le vecteur aléatoire (U, V) suit la loi uniforme sur A s'il a pour densité $c\mathbf{1}_A$ avec $c = 1/\lambda_2(A)$.

1) Montrer que $\lambda_2(A) = \frac{1}{2}$. *Indication :* on pourra utiliser le changement de variable

$$\varphi :]0,+\infty[\times\mathbb{R} \longrightarrow]0,+\infty[\times\mathbb{R}, \quad (u,v) \longmapsto (x,y) = \varphi(u,v) = \Big(u, \frac{v}{u}\Big).$$

2) Calculer la densité du vecteur aléatoire $(X, Y) := \Big(U, \dfrac{V}{U}\Big)$. En déduire que Y a pour densité f.

3) Cette méthode n'est applicable que si l'on sait effectivement simuler un vecteur de loi uniforme sur A. C'est le cas notamment lorsque A est *borné* [2]. En effet on peut alors inclure A dans un rectangle à côtés parallèles aux axes et appliquer l'algorithme du rejet pour simuler (U, V). Montrer qu'une condition suffisante pour que A soit borné est que la densité f vérifie les deux conditions

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x) < +\infty \quad \text{et} \quad \sup_{x\in\mathbb{R}} x^2 f(x) < +\infty. \tag{4}$$

1. Avec un gros abus de langage puisque c'est le vecteur aléatoire (U, V) qui suit une loi uniforme, pas ses composantes (sauf si A est un produit cartésien). Une appelation plus exacte mais de lourdeur dissuasive serait « rapport des composantes d'un vecteur de loi uniforme ».

2. Ceci ne résulte pas automatiquement de la finitude de $\lambda_2(A)$.

Ex 4. *Escargot aléatoire (4 points)*

Soit $(X_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, indépendantes et de même loi, de carré intégrable ($\mathbf{E}(X_1^2) < +\infty$). On définit par récurrence la suite de variables aléatoires positives $(R_n)_{n\geq 1}$ par

$$R_1 = |X_1|, \quad R_n = \sqrt{R_{n-1}^2 + X_n^2}, \quad n \geq 2.$$

1) Montrer que $(n^{-1/2}R_n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers une limite constante τ que l'on exprimera en fonction de $\mathbf{E}(X_1^2)$.

2) Pour illustrer graphiquement cette convergence, on prend les X_i de même loi uniforme sur $[0, 1]$ et on construit dans un repère orthonormé du plan la suite $(M_n)_{n\geq 1}$ de points aléatoires par la récurrence suivante. On pose d'abord $M_1 = (X_1, 0)$, puis connaissant M_{n-1} on obtient M_n comme l'unique point tel que $M_{n-1}M_n = X_n$ et que l'angle $(\overrightarrow{M_{n-1}M_n}, \overrightarrow{M_{n-1}O})$ ait pour mesure $+\pi/2$. En d'autre termes, on construit M_n tel que le triangle $OM_{n-1}M_n$ soit rectangle en M_{n-1}, de côtés de l'angle droit $OM_{n-1} = R_{n-1}$ et $M_{n-1}M_n = X_n$ et en tournant toujours dans le sens trigonométrique. On trace ainsi la ligne polygonale $\mathcal{E}_n$ de sommets $M_1, M_2, \ldots, M_n$ (l'escargot aléatoire, cf. figure 1).

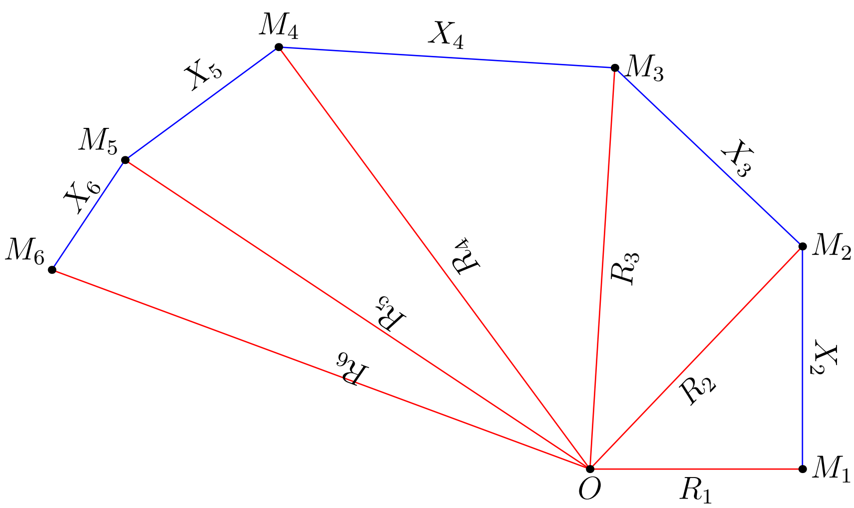

FIG. 1 – Construction de l'escargot aléatoire $\mathcal{E}_6$

On fixe un $\varepsilon > 0$. Montrer que presque sûrement, $\mathcal{E}_n$ est inclus dans le disque de centre O et de rayon $(1 + \varepsilon)\sqrt{n/3}$ pour tout n assez grand (cf. figure 2).

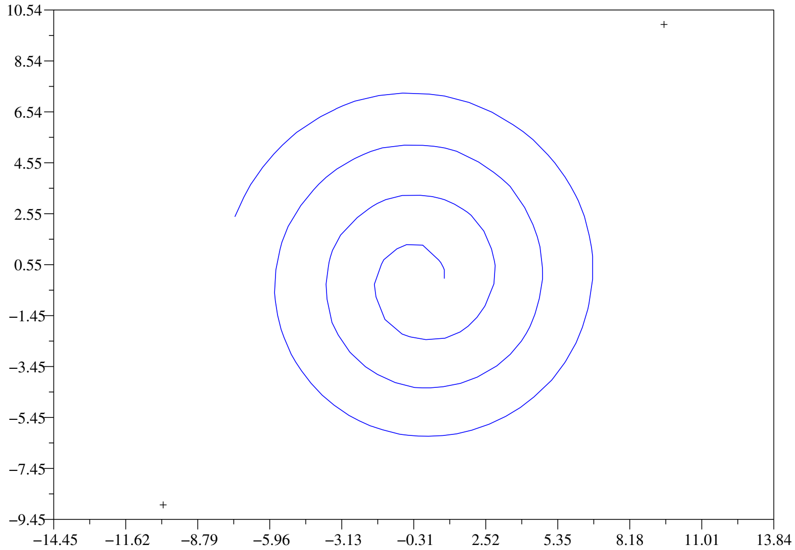

FIG. 2 – Escargot aléatoire $\mathcal{E}_{200}$ (simulation en Scilab)