Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IFP **Année 2003-04**

Examen, 30 janvier 2004

*Ce sujet comporte **6 pages**, dont 3 figures*
Conditions de déroulement de l'épreuve :
Les calculatrices sont interdites.
Liste exhaustive des documents autorisés :

1. Polycopié de DEUG *Introduction au calcul des probabilités.*
2. Polycopié du *cours* d'IFP 2003-2004.
3. Une feuille *manuscrite* recto verso au format standard A4, pouvant contenir des extraits du cours à votre choix, à l'exclusion de tout corrigé d'exercice.

Le barème n'est donné qu'à titre indicatif pour vous aider à gérer votre temps et n'a pas valeur contractuelle.

Ex 1. *(2 points)*

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles, *de même loi*, telle que $\mathbf{E}|X_1| < +\infty$. On pose $Y_n := \min(X_n, n)$. Montrer que $\mathbf{E}Y_n$ existe et que $\mathbf{E}Y_n$ tend vers $\mathbf{E}X_1$ quand n tend vers l'infini.

Ex 2. *Convergence d'espérances (5 points)*

On note X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $a > 0$, ce qui signifie que la loi de X a une densité $f(t) = a\mathrm{e}^{-at}\mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(t)$ par rapport à la mesure de Lebesgue λ. On définit la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\geq 1}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad Y_n := \left(1 + \frac{X}{n}\right)^n \mathbf{1}_{\{X\geq 0\}}.$$

Ainsi Y_n est une variable aléatoire *positive* et l'expression $\mathbf{E}Y_n$ a toujours un sens comme élément de $\overline{\mathbb{R}}_+$. Le but de l'exercice est d'étudier sa limite quand n tend vers l'infini.

1) Exprimer $\mathbf{E}Y_n$ comme une intégrale sur $[0, +\infty[$ par rapport à λ.

2) Vérifier l'inégalité

$$\forall x \geq 0, \quad \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}^x.$$

On rappelle que $\ln(1 + u) \leq u$ pour tout $u \in]-1, +\infty[$.

3) On suppose que $a > 1$. En utilisant les deux questions précédentes, montrer que $\mathbf{E}Y_n$ tend vers une limite finie et la calculer en fonction de a.

4) Que peut-on dire de $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}Y_n$ dans le cas $0 < a \leq 1$?

Ex 3. *Carrés aléatoires (3 points)*

Soit $(X_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$, à valeurs dans $]0,1[$, indépendantes et de même loi uniforme sur $[0,1]$. On pose $S_n=\sum_{i=1}^n X_i$ et on note M_i le *point aléatoire* de coordonnées (S_i,S_i) dans un repère orthonormé du plan. On pose $M_0=O$ origine du repère. Pour $i\in\mathbf{N}^*$, on note C_i le *carré aléatoire* ouvert de diagonale $M_{i-1}M_i$ (cf. figure 1).

1) On désigne par λ_2 la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^2$. Soit $E_n=\bigcup_{i=1}^n C_i$. Montrer que quand n tend vers $+\infty$, $n^{-1}\lambda_2(E_n)$ converge presque sûrement vers une limite que l'on déterminera.

2) Soit $a\in]0,1[$ et Δ_a la droite d'équation $y=x+a$. Calculer la probabilité $P(\Delta_a\cap C_i\neq\emptyset)$ (commencer par exprimer l'évènement $\{\Delta_a\cap C_i\neq\emptyset\}$ à l'aide de la variable aléatoire X_i). Trouver la loi de T_n, nombre de C_i ($1\le i\le n$) ayant une intersection non vide avec Δ_a.

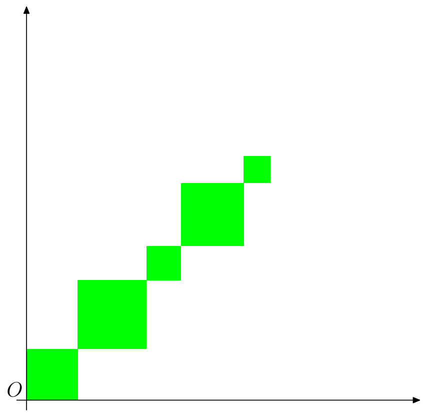

FIG. 1 – Carrés aléatoires

Problème (*13 points*)

Ce problème est consacré à l'algorithme du rejet. La première partie en étudie le principe général. La deuxième met en œuvre cet algorithme pour simuler la loi uniforme sur un « pétale de fleur », puis sur la fleur entière. La méthode du rejet (appelée aussi d'acceptation-rejet) peut être décrite abstraitement comme suit. On suppose que l'on sait générer un vecteur aléatoire M de $\mathbb{R}^d$ suivant une certaine loi μ. On génère alors l'un après l'autre les vecteurs aléatoires $M_1,\dots,M_n,\dots$ mutuellement indépendants et de même loi que M, en s'arrêtant au premier d'entre eux qui vérifie une certaine condition $(\mathcal{H}_0)$. Soit T l'indice (aléatoire) correspondant. On a ainsi fabriqué un vecteur (doublement) aléatoire M_T. Comme T est aléatoire, la loi de ce vecteur n'est pas celle de M, c'est une nouvelle loi ν. Si la simulation de M et le test de $(\mathcal{H}_0)$ sont facilement programmables, on dispose ainsi d'une méthode pour générer un vecteur aléatoire de loi ν.

Tous les vecteurs aléatoires et toutes les variables aléatoires considérés dans ce problème seront définis sur le même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$.

Préliminaire

Soit B un borélien de $\mathbb{R}^d$ tel que $0 < \lambda_d(B) < +\infty$, λ_d désignant la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. On dit que le vecteur aléatoire $M : \Omega \to \mathbb{R}^d$ suit la loi uniforme sur B, notation $M \sim \mathrm{Unif}(B)$, si sa loi P_M est donnée par

$$\forall A \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^d),\ P_M(A) = \mathbf{P}(M \in A) = \frac{\lambda_d(A \cap B)}{\lambda_d(B)}. \tag{1}$$

On rappelle que cette condition équivaut à l'existence pour la mesure P_M d'une densité de la forme $c\mathbf{1}_B$ par rapport à λ_d, c étant une constante.

1) Montrer que si M suit la loi uniforme sur B et si φ est une *bijection linéaire* $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $\varphi(M)$ suit la loi uniforme sur $\varphi(B)$.

Partie 1

On suppose désormais que $(M_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de vecteurs aléatoires $\Omega \to \mathbb{R}^d$, mutuellement *indépendants* et de *même loi* μ telle que $\mu(B) > 0$. On assimilera pour la commodité du langage le vecteur $M_i(\omega)$ à un point de $\mathbb{R}^d$.

2) Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose

$$T(\omega) := \inf\{i \in \mathbb{N}^*;\ M_i(\omega) \in B\},$$

avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$. T est donc le numéro du premier point « tombé » dans B. Montrer en vous aidant des indications suivantes que T est une variable aléatoire discrète suivant la loi géométrique de paramètre $p = \mu(B)$. On notera $q := 1 - p$.
Indications. T est une application $\Omega \to \overline{\mathbb{N}}^*$. Sa mesurabilité relativement aux tribus $\mathcal{F}$-$\mathcal{P}(\overline{\mathbb{N}}^*)$ s'établit en vérifiant que pour tout $k \in \overline{\mathbb{N}}^*$, l'ensemble $\{T = k\} = \{\omega \in \Omega;\ T(\omega) = k\}$ appartient à $\mathcal{F}$. Décomposer $\{T = k\}$ à l'aide d'opérations ensemblistes sur des évènements de la forme $M_i^{-1}(A)$, de façon à exploiter la mesurabilité des M_i. Utiliser cette décomposition pour montrer que $\mathbf{P}(T = +\infty) = 0$ et pour calculer $\mathbf{P}(T = k)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

3) Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^d)$, calculer $\mathbf{P}(M_k \in A \cap B \text{ et } T = k)$ en fonction de q et de $\mu(A \cap B)$.

4) On définit $M_T : \Omega \to \mathbb{R}^d$ par

$$M_T(\omega) := \begin{cases} M_{T(\omega)}(\omega) & \text{si } T(\omega) < +\infty, \\ 0 & \text{si } T(\omega) = +\infty. \end{cases}$$

Cette définition équivaut à

$$M_T = \sum_{k\in\overline{\mathbb{N}}^*} M_k \mathbf{1}_{\{T=k\}},$$

ce qui montre que M_T est mesurable $\mathcal{F}$-$\mathrm{Bor}(\mathbb{R}^d)$, c'est donc bien un *vecteur aléatoire.* Prouver que $\mathbf{P}(M_T \in A) = \mathbf{P}(M_1 \in A \mid M_1 \in B)$. *Indication :* partitionner Ω par les évènements $\{T = k\}$.

5) On suppose désormais que B et C sont deux boréliens tels que $B \subset C$ et $0 < \lambda_d(B) < \lambda_d(C) < +\infty$ et que μ est la loi uniforme sur C. Quelle est la loi de M_T ?

6) On dispose seulement d'un générateur de nombres au hasard capable de simuler une suite aussi longue que l'on veut $U_1, \dots, U_\ell$ de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$. On s'intéresse au coût de l'algorithme du rejet pour la simulation d'un « échantillon » $M_{T_1}, \dots, M_{T_n}$ de vecteurs aléatoires *indépendants*[1] de même loi que M_T. Ce coût sera mesuré par le nombre S_n de variables U_i utilisées.

On suppose dans cette question que B est *borné*. On peut alors choisir C de la forme $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]$.

6 a) Expliquer pourquoi le vecteur aléatoire $M = (X_1, \dots, X_d)$ défini par

$$X_j := a_j + (b_j - a_j)U_j, \quad j = 1, \dots, d,$$

suit la loi uniforme sur C.

6 b) Exprimer S_n en fonction des T_k et expliquer pourquoi la suite de variables aléatoires $n^{-1}S_n$ converge presque sûrement vers une limite constante que l'on exprimera en fonction du rapport $\tau := \lambda_d(C)/\lambda_d(B)$. Dans toute la suite du problème, le coût de l'algorithme du rejet sera la valeur de cette limite presque sûre de S_n/n.

6 c) Comment a-t-on intérêt à choisir C pour minimiser le coût de l'algorithme ? Illustrez votre réponse dans le cas $d = 2$ en prenant pour B le disque unité.

Partie 2

Dans cette partie on s'intéresse à la simulation de vecteurs aléatoires suivant la loi uniforme sur un borélien B de $\mathbb{R}^2$ dont la frontière a pour équation en coordonnées polaires $r = \cos(2t)$. On peut découper B en quatre « pétales » B_0, B_1, B_2, B_3, où

$$B_0 := \bigl\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \le r \le \cos(2t),\ -\pi/4 \le t \le \pi/4\bigr\},$$

et les autres pétales se déduisent de B_0 par rotation de centre O et d'angles $\pi/2$, π, $3\pi/2$, cf. figure 2. On ne vous demande pas de justifier la construction de la courbe frontière de B.

7) Vérifier que $\lambda_2(B_0) = \pi/8$. En notant C_0 le rectangle circonscrit à B_0, cf. figure 3, on en déduit (justification non demandée) que

$$\tau = \frac{\lambda_2(C_0)}{\lambda_2(B_0)} = \frac{32}{3\pi\sqrt{6}} \simeq 1{,}386.$$

8) Soit (U, V) un vecteur aléatoire à composantes indépendantes de même loi uniforme sur $[0,1]$. On définit le vecteur aléatoire

$$(X, Y) := \bigl(U^{1/2}\cos(2\pi V), U^{1/2}\sin(2\pi V)\bigr).$$

Montrer que (X, Y) suit la loi uniforme sur le disque de centre O et de rayon 1.

1. On admettra qu'il suffit pour cela de lancer n fois l'algorithme du rejet et que les variables aléatoires $T_1, \dots, T_n$ sont indépendantes.

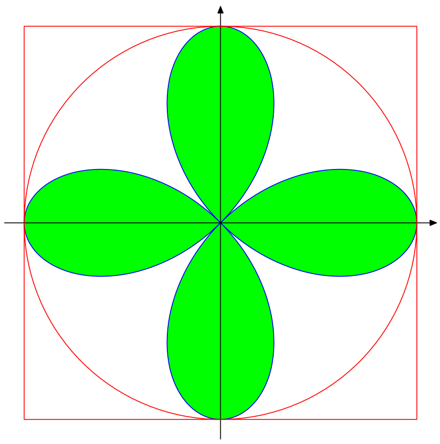

FIG. 2 – Ensemble B, cercle et carré circonscrits

9) Justifiez l'algorithme suivant pour simuler un vecteur aléatoire M'_T de loi uniforme sur B. On commence par générer une variable aléatoire U de loi uniforme sur $[0,1]$ et on définit la variable aléatoire discrète N par

$$N = \sum_{k=0}^{3} k\mathbf{1}_{\{k \leq 4U < k+1\}}.$$

On lance ensuite l'algorithme du rejet avec B_0 et C_0 (cf. question 7) qui nous fournit M_T de loi uniforme sur B_0. On prend alors pour M'_T l'image de M_T par la rotation de centre O et d'angle $N\pi/2$; on notera ρ_k la rotation de centre O et d'angle $k\pi/2$, $k = 0$, 1, 2, 3.

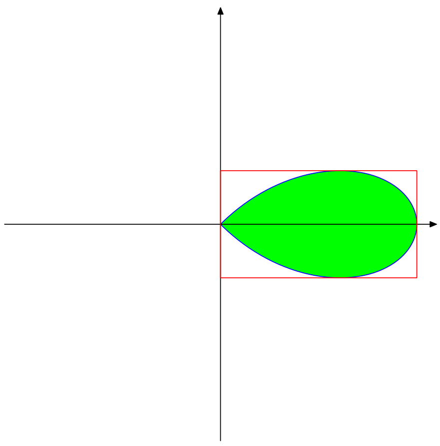

FIG. 3 – Ensemble B_0 et rectangle circonscrit

10) Comparez par leur coût (au sens de la limite p.s. de S_n/n, cf. question 6) les trois algorithmes suivants pour simuler un vecteur aléatoire de loi uniforme sur B :

a) Simulation de la loi uniforme sur le carré $C = [-1,1]^2$ circonscrit à B et algorithme du rejet avec B et C.

b) Simulation de la loi uniforme sur le disque D de centre O et de rayon 1 (pourquoi contient-il B ?) par la méthode de la question 8 et algorithme du rejet avec B et D.

c) La méthode mixte de la question 9.