Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IFP **Année 2003-04**

Devoir Surveillé, 28 novembre 2003

Conditions de déroulement de l'épreuve :
Durée : 4 heures.
Les calculatrices sont interdites.
Liste exhaustive des documents autorisés :

1. Polycopié de DEUG *Introduction au calcul des probabilités.*
2. Polycopié du *cours* d'IFP 2003-2004 (Chapitres 1 à 4).
3. Une feuille *manuscrite* recto verso au format standard A4, pouvant contenir des extraits du cours à votre choix, à l'exclusion de tout corrigé d'exercice.

Le barème n'est donné qu'à titre indicatif pour vous aider à gérer votre temps et n'a pas valeur contractuelle.

Ex 1. *Continuité presque partout (3 points).*
Soit μ une mesure sur $\big(\mathbb{R}, \mathrm{Bor}(\mathbb{R})\big)$ vérifiant les deux conditions

$$\mu(\{0\}) = 0, \tag{1}$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad a < b \ \Rightarrow\ \mu(]a, b[) > 0. \tag{2}$$

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) := \begin{cases} \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue μ-presque partout.

2) Prouver qu'il n'existe aucune fonction g continue *partout* sur $\mathbb{R}$ et égale μ-presque partout à f. *Indication :* on pourra raisonner par l'absurde en montrant que s'il existe une telle g, on peut construire une suite décroissante et convergente vers 0 de réels x_k tels que pour tout k, $f(x_k) = g(x_k)$ avec $f(x_k) > 1/2$ pour k pair et $f(x_k) < -1/2$ pour k impair.

3) *Question facultative hors barème.* On suppose que $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est borélienne et *uniformément* continue sur un borélien E de $\mathbb{R}$ tel que $\mu(\mathbb{R} \setminus E) = 0$. Montrer qu'il existe une fonction g partout continue sur $\mathbb{R}$ telle que $h(x) = g(x)$ pour tout $x \in E$.

Ex 2. *Théorème de Poincaré (7 points).*
Le but de cet exercice est de démontrer le théorème suivant.

Théorème 1 *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *un espace probabilisé et* $f : \Omega \to \Omega$, *mesurable* $\mathcal{F}$-$\mathcal{F}$, *qui conserve la probabilité* $\mathbf{P}$: $\forall C \in \mathcal{F}$, $\mathbf{P}(f^{-1}(C)) = \mathbf{P}(C)$.

Alors pour tout A *de* $\mathcal{F}$, *il existe* $A' \in \mathcal{F}$ *et inclus dans* A *tel que :*

a) $\mathbf{P}(A') = \mathbf{P}(A)$

b) $\forall \omega \in A'$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists p \geq n$, *tel que* $f^p(\omega) \in A$, *où* $f^p = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{p \text{ fois}}$.

Si on appelle *trajectoire* de ω la suite de ses images $(f^p(\omega))_{p \geq 1}$, on peut exprimer ceci en disant que pour presque tout ω de A, la trajectoire de ω repasse par A une infinité de fois.

1) *Un exemple.* Montrer que les hypothèses du théorème sont vérifiées dans le cas particulier suivant. On prend $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) = ([0,1], \mathrm{Bor}([0,1]), \lambda)$, où λ est la restriction de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ à la tribu borélienne de $[0,1]$. On définit $f : [0,1] \to [0,1]$ par

$$f(x) = 2x\mathbf{1}_{[0,1/2[}(x) + (2x-1)\mathbf{1}_{[1/2,1]}(x).$$

Indication. On admettra que la tribu $\mathrm{Bor}([0,1])$ est engendrée par la famille des intervalles $[a,b]$, $0 \leq a < b \leq 1$ et on commencera par chercher $f^{-1}([a,b])$.

2) On introduit les ensembles

$$A_0 := \{\omega \in A;\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ f^n(\omega) \notin A\}, \quad A_1 := \{\omega \in A;\ \exists n \in \mathbb{N}^*,\ f^n(\omega) \in A\}.$$

Autrement dit, A_0 est l'ensemble des éléments de A dont la trajectoire ne repasse jamais par A, tandis que A_1 est l'ensemble de ceux dont la trajectoire repasse au moins une fois par A. On a clairement $A_1 = A \setminus A_0$. Le but de cette question est d'établir l'égalité $\mathbf{P}(A_1) = \mathbf{P}(A)$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n := (f^n)^{-1}(A_0)$.

2. a) Vérifier que A_0 et A_1 et tous les B_n sont dans $\mathcal{F}$.

2. b) Montrer que les B_n sont deux à deux disjoints.

2. c) En déduire que $\mathbf{P}(A_0) = 0$ et conclure.

3) On définit par récurrence $A_k := \{\omega \in A_{k-1};\ \exists n \geq 1,\ f^n(\omega) \in A_{k-1}\}$ pour tout $k \geq 2$. Ainsi A_k est l'ensemble des éléments ω de A dont la trajectoire repasse au moins k fois par A. Montrer que $\mathbf{P}(A_k) = \mathbf{P}(A)$ et achever la démonstration du théorème 1.

Ex 3. *Interlude* [1] *(2 points)*

Soit $(T, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et f une application $T \to \overline{\mathbb{R}}_+$, mesurable $\mathcal{T}$ - $\mathrm{Bor}(\overline{\mathbb{R}}_+)$. On note ν la mesure de densité f par rapport à μ, définie par :

$$\forall B \in \mathcal{T}, \quad \nu(B) = \int_B f \,\mathrm{d}\mu.$$

Montrer que si $\mu(B) = 0$, alors $\nu(B) = 0$. *Indication :* on pourra traiter d'abord le cas où f est bornée, puis généraliser (ce n'est pas la seule méthode possible).

[1] Cet exercice est indépendant du problème qui suit, mais son résultat y sera utile.

Problème. *(10 points)*

Dans tout le problème, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ est un espace probabilisé, $p \in]0,1[$ et $(X_k)_{k\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ et de même loi de Bernoulli de paramètre p. On ne fait pas d'hypothèse générale sur la structure de dépendance de cette suite. Le but du problème est l'étude de la loi de la variable aléatoire Y définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ par :

$$Y := \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{X_k}{4^k}. \tag{3}$$

On rappelle que la notation $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ désigne l'ensemble de toutes les suites $(a_k)_{k\geq 1}$ dont les termes a_k ne peuvent prendre que les valeurs 0 ou 1. On note λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Les questions sont largement indépendantes, même si certaines utilisent les résultats des questions précédentes que l'on pourra admettre en cas de besoin. La question 8) peut même se traiter en ignorant tout ce qui la précède.

1) Expliquer pourquoi Y est bien définie par (3) et est une variable aléatoire réelle.

2) Calculer $\mathbf{E}Y$ en justifiant votre réponse.

3) Calculer pour $j \in \mathbb{N}^*$ la somme de série $\displaystyle\sum_{k>j} \frac{1}{4^k}$.

4) On désigne par C l'ensemble des réels $x \in [0,1]$ tels que

$$\exists (a_k)_{k\geq 1} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}, \quad x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{4^k}. \tag{4}$$

4. a) Montrer que pour $x \in C$, la décomposition (4) est unique. On pourra procéder comme suit. Si $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k 4^{-k} = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k 4^{-k}$ pour deux suites $(a_k)_{k\geq 1}$ et $(b_k)_{k\geq 1}$ appartenant à $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$, on pose $j := \sup\{n \in \mathbb{N}^*;\ \forall k \leq n,\ a_k = b_k\}$ et on montre que si j est fini on aboutit à une contradiction.

4. b) En déduire que l'application

$$\varphi : \{0,1\}^{\mathbb{N}^*} \to C \quad (a_k)_{k\geq 1} \longmapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{4^k}$$

est une bijection. C est-il dénombrable ?

5) On se propose de montrer que $\lambda(C) = 0$. Pour cela on fixe un choix de n premiers chiffres binaires $c_1, \dots, c_n \in \{0,1\}$ et on note $C(c_1, \dots, c_n)$ le sous-ensemble de C formé des x tels que dans le développement (4), $a_i = c_i$ pour $1 \leq i \leq n$. On admet que C et les $C(c_1, \dots, c_n)$ sont des boréliens de $\mathbb{R}$.

5. a) Montrer que $\lambda\big(C(c_1, \dots, c_n)\big) \leq \dfrac{1}{3 \times 4^n}$ et utiliser cette inégalité pour obtenir un majorant de $\lambda(C)$, dépendant de n.

5. b) En déduire que $\lambda(C) = 0$.

6) On note P_Y la loi de Y. Que vaut $P_Y(C)$? La mesure P_Y peut-elle avoir une densité par rapport à λ ?

7) On suppose dans cette question que les variables aléatoires de Bernoulli X_k sont indépendantes (et toujours de même paramètre $p \in]0,1[$). L'étude systématique de l'indépendance n'ayant pas encore été vue en cours, on notera que cette indépendance se traduit par la validité des égalités

$$\mathbf{P}(X_1 = c_1, \dots, X_n = c_n) = \mathbf{P}(X_1 = c_1) \dots \mathbf{P}(X_n = c_n),$$

pour tout $n \geq 2$ et tout choix de chiffres binaires $(c_1, \dots, c_n) \in \{0,1\}^n$. Montrer que dans ce cas $P_Y(\{x\}) = \mathbf{P}(Y = x) = 0$ pour tout $x \in C$. Que peut-on en déduire pour la fonction de répartition F de Y ?

8) Pour les deux cas particuliers suivants où les X_k sont dépendantes, déterminer la loi de Y et représenter graphiquement F.

8. a) $X_k = X_1$ pour tout $k \geq 2$;

8. b) X_1 et X_2 sont indépendantes et pour $k \geq 3$, $X_k = X_1$ si k est impair, $X_k = X_2$ si k est pair.

9) Est-il possible de choisir les X_k, toujours de même loi Bern(p) de sorte que pour tout $x \in C$, $\mathbf{P}(Y = x)$ soit strictement positif ?

10) *Question facultative hors barême. Cette question étant un exercice d'analyse ne sera prise en compte par les correcteurs que pour les étudiants ayant obtenu au moins 10 points sur tout ce qui précède (exercices et problème).* Montrer que C est un fermé de $\mathbb{R}$. On commencera par montrer que si x et x' sont dans C et tels que $|x - x'| < 4^{-j}$, leurs $j-1$ premiers chiffres binaires coïncident. Utiliser ceci pour prouver que si $(x_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'éléments de C, convergente dans $\mathbb{R}$, sa limite x appartient encore à C.