Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IFP **Année 2003-04**

Devoir n° 4
À rendre dans la semaine du 5 janvier 2004

Ce devoir comporte trois exercices de calcul de lois et deux autres sur la loi des grands nombres. Seul l'exercice 5 nécessite la connaissance de la loi forte des grands nombres. Celle-ci devrait être vue en cours à la rentrée de janvier. Pour vous permettre de traiter cet exercice sans attendre la dernière minute, on donne ci-dessous l'énoncé de la loi forte des grands nombres.

Théorème 1 *On suppose que les variables aléatoires réelles X_k définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ sont indépendantes,* de même loi *et que* $\mathbf{E}|X_1| < +\infty$. *Alors*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} \mathbf{E}X_1. \tag{1}$$

Ex 1. Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ et indépendantes : X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi est donnée par $\mathbf{P}(X = k) = p_k$, $k \in \mathbb{N}$, et Y est de loi uniforme sur $[0, 1]$. Déterminer la fonction de répartition F de la variable aléatoire XY. Que peut on dire de F ?

Ex 2. Soit (X, Y) un vecteur aléatoire dont la loi possède une densité de la forme $f(x, y) = g(x^2 + y^2)$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$. Déterminer la loi de la variable aléatoire réelle T définie par

$$T(\omega) := \begin{cases} \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} & \text{si } Y(\omega) \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ex 3. Un vecteur aléatoire (X, Y) admet sur $\mathbb{R}^2$ une loi de densité

$$f(x, y) = x\mathrm{e}^{-(x+y)}\, \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\, \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(y).$$

On pose $U = \min(X, Y)$, $V = \max(X, Y)$.

1) Calculer la densité de la loi du vecteur aléatoire (U, V).
2) En déduire la loi de U et celle de V.
3) Calculer $\mathrm{Cov}(U, V)$.

Ex 4. Soit $(X_n)_{n\geq 3}$ une suite de variables aléatoires discrètes définies sur le même $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ et indépendantes. X_n prend les valeurs $-n$, n et 0 avec les probabilités :

$$\mathbf{P}(X_n = n) = \mathbf{P}(X_n = -n) = \frac{1}{2n\ln n} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n\ln n}.$$

1) Calculer la variance de X_n. En déduire que la suite $(M_n)_{n\geq 3}$ définie par :

$$M_n := \frac{1}{n}\sum_{i=3}^{n} X_i$$

converge vers 0 dans $L^2(\Omega)$ (et donc aussi en probabilité).

2) En appliquant le lemme de Borel Cantelli aux ensembles $A_n = \{X_n = n\}$ montrer que la suite M_n ne converge pas presque sûrement.
Indication. Si $M_n(\omega)$ converge vers une limite finie ℓ, $X_n(\omega)/n$ converge nécessairement vers 0 (pourquoi ?).

Ex 5.

1) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r. indépendantes de même loi uniforme sur $[0,1]$. Étudier la limite

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}\left(\frac{X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2}{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}\right).$$

On commencera par définir *proprement* la suite de variables aléatoires dont on prend l'espérance.

2) λ_n désignant la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$, montrer que pour toute fonction f continue sur $[0,1]$

$$\int_{[0,1]^n} f\Big(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\Big)\,\mathrm{d}\lambda_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f\Big(\frac{1}{2}\Big).$$