Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IFP **Année 2003-04**

Corrigé du Devoir n° 4

Ex 1. Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ et indépendantes : X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi est donnée par $\mathbf{P}(X = k) = p_k$, $k \in \mathbb{N}$, et Y est de loi uniforme sur $[0, 1]$. On étudie la fonction de répartition F de XY.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $F(x) = \mathbf{P}(XY \leq x)$. Comme XY est une variables aléatoire positive, il est clair que $F(x) = 0$ pour tout $x < 0$. Pour calculer $\mathbf{P}(XY \leq x)$ lorsque x est positif, l'idée est de conditionner par les valeurs possibles de X, de façon à pouvoir exploiter l'indépendance de X et Y.

Supposons dans un premier temps que $\mathbf{P}(X = k) \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On dispose alors d'une partition de Ω en la suite $(\{X = k\})_{k\in\mathbb{N}}$ d'évènements de probabilité non nulle. La formule de conditionnement par les cas possibles (cf. [ICP], Chap. 2) s'écrit ici :

$$\mathbf{P}(XY \leq x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(XY \leq x \mid X = k)\mathbf{P}(X = k). \tag{1}$$

Le terme indexé par $k = 0$ se calcule directement :

$$\mathbf{P}(XY \leq x \mid X = 0)p_0 = \mathbf{P}(0 \times Y \leq x \mid X = 0)p_0 = \mathbf{P}(\Omega \mid X = 0)p_0 = p_0,$$

puisque $x \geq 0$. Pour $k > 0$, on a

$$\mathbf{P}(XY \leq x \mid X = k) = \mathbf{P}\Big(Y \leq \frac{x}{k} \mid X = k\Big) = \mathbf{P}\Big(Y \leq \frac{x}{k}\Big),$$

la deuxième égalité étant due à *l'indépendance* des variables aléatoires X et Y qui entraîne celle des évènements $\{Y \leq x/k\}$ et $\{X = k\}$. En reportant dans (1), on obtient

$$\forall x \geq 0, \quad \mathbf{P}(XY \leq x) = p_0 + \sum_{k\in\mathbb{N}^*} p_k\mathbf{P}\Big(Y \leq \frac{x}{k}\Big). \tag{2}$$

À ce stade nous n'avons pas encore utilisé notre connaissance de la loi de Y (sauf pour en déduire la positivité de Y). La formule (2) est donc valable pour n'importe quelle variable aléatoire positive Y indépendante de X.

Puisque Y suit la loi uniforme sur $[0, 1]$, on a pour tout $x \geq 0$,

$$\mathbf{P}\Big(Y \leq \frac{x}{k}\Big) = P_Y\big(]-\infty, x/k]\big) = \frac{\lambda\big(]-\infty, x/k] \cap [0, 1]\big)}{\lambda\big([0, 1]\big)} = \min\Big(1, \frac{x}{k}\Big).$$

On obtient donc l'expression suivante pour F :

$$\forall x \geq 0, \quad F(x) = p_0 + \sum_{k\in\mathbb{N}^*} p_k \min\Big(1, \frac{x}{k}\Big). \tag{3}$$

Pour établir (3), nous nous sommes restreints au cas où $p_k > 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, afin d'éviter le conditionnement par un évènement de probabilité nulle. Il n'est pas difficile de lever cette restriction. Notons

$$I := \{k \in \mathbb{N};\ p_k > 0\}, \quad I^c := \mathbb{N} \setminus I, \quad \Omega' := \{\omega \in \Omega;\ X(\omega) \in I\}.$$

Il est clair que $\mathbf{P}(\Omega') = 1$, d'où $\mathbf{P}(XY \leq x) = \mathbf{P}(\{XY \leq x\} \cap \Omega')$. De plus la suite $(\{X = k\})_{k\in I}$ forme une partition de Ω' en évènements de probabilité non nulle. On en déduit

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(XY \leq x) = \mathbf{P}(\{XY \leq x\} \cap \Omega') &= \sum_{k\in I} \mathbf{P}(\{XY \leq x\} \cap \Omega' \mid X = k)\mathbf{P}(X = k)\\
&= \sum_{k\in I} \mathbf{P}(XY \mid X = k)\mathbf{P}(X = k),
\end{aligned}$$

en notant que si $k \in I$, $\{X = k\}$ est inclus dans Ω', ce qui explique la disparition de Ω' dans la dernière égalité. À partir de là, il est clair que l'on aboutit à l'analogue de (3), avec une indexation par I au lieu de $\mathbb{N}$. En fait la formule (3) elle même reste valable puisqu'elle ne contient plus de probabilités conditionnelles et que les termes indexés par I^c sont nuls.

La formule (3) permet de voir que F est continue sur $[0, +\infty[$. En effet, les fonctions $g_k : x \mapsto \min(1, x/k)$ sont continues sur $[0, +\infty[$ et uniformément bornées $0 \leq g_k \leq 1$. La série au second membre de (3) est convergente normalement (donc aussi uniformément) sur $[0, +\infty[$, puisque

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sup_{x\geq 0} |p_k g_k(x)| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} p_k \leq 1 < +\infty.$$

Sa somme est donc bien une fonction continue sur $[0, +\infty[$. Finalement, F est continue sur $\mathbb{R}$ si $p_0 = 0$. Sinon elle a une seule discontinuité, de première espèce, au point 0 avec saut d'amplitude p_0.

Une autre information contenue dans (3) est que F est *affine* sur chaque intervalle $[j, j + 1[$, $j \in \mathbb{N}$. En effet en remarquant que $g_k(x) = 1$ si $x \geq k$ et $g_k(x) = x/k$ si $x < k$, on obtient :

$$\forall x \in [j, j + 1[, \quad F(x) = \sum_{k=0}^{j} p_k + x \sum_{k=j+1}^{+\infty} \frac{p_k}{k} = a_j + b_j x. \tag{4}$$

Le graphe de F sur $[0, +\infty[$ est donc une *ligne polygonale* avec sommets aux points d'abscisses entières. Ce graphe admet bien sûr comme asymptote la droite horizontale d'équation $y = 1$ (comme le graphe de n'importe quelle fonction de répartition). La

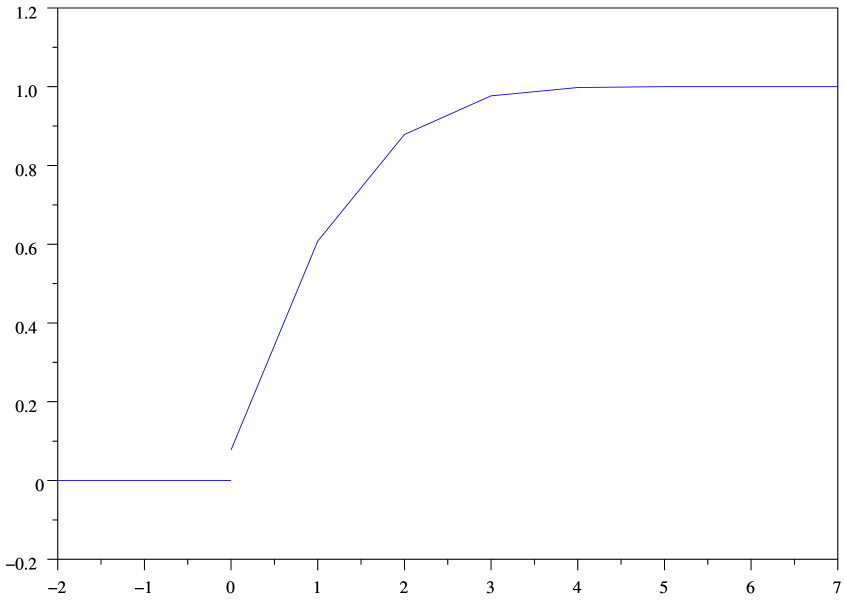

FIG. 1 – F pour $X \sim \mathrm{Bin}(5, 0.4)$

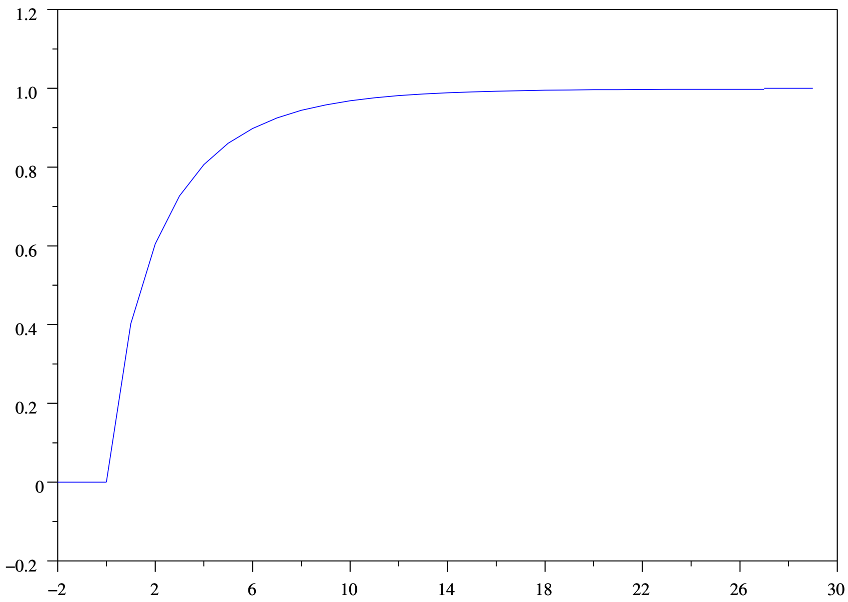

FIG. 2 – F pour $X \sim \mathrm{Geom}(0.2)$

pente du graphe entre j et $j+1$ est constante et vaut b_j. Comme la suite $(b_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est décroissante, la restriction de F à $[0,+\infty[$ est une fonction *concave*[1].

Dans le cas où F est continue (*i.e.* si $p_0 = 0$), on peut se demander si la loi de XY admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue. La réponse est affirmative puisque F est alors C^1 par morceaux (Prop. 4.51 du cours). Dans le résultat démontré en cours, le nombre de « morceaux » était fini, ici il peut être infini dénombrable (les morceaux étant les intervalles $]j, j+1[$, $j \in \mathbb{N}$). Il facile d'étendre la preuve vue en cours à ce nouveau cas (vérification laissée en exercice). En écrivant F sous la forme

$$F(x) = \sum_{j=0}^{+\infty}(a_j + b_j x)\mathbf{1}_{[j,j+1[}(x), \quad (x \geq 0), \tag{5}$$

on obtient la densité $f = F'$ λ-p.p. en remarquant que F est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}, \quad F'(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} b_j \mathbf{1}_{]j,j+1[}(x).$$

Il n'y a aucun problème pour dériver la série terme à terme, car pour x_0 fixé dans $\mathbb{R}_+\setminus\mathbb{N}$, il existe un unique $k\in\mathbb{N}$ tel que $k < x_0 < k+1$ et pour tous les x du voisinage $]k, k+1[$ de x_0, la série (5) a tous ses termes nuls sauf celui d'indice k, autrement dit, $F(x) = a_k + b_k x$ sur $]k, k+1[$.

Ex 2. Soit (X,Y) un vecteur aléatoire dont la loi possède une densité de la forme $f(x,y) = g(x^2+y^2)$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$. Déterminer la loi de la variable aléatoire réelle T définie par

$$T(\omega) := \begin{cases} \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} & \text{si } X(\omega) \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Complétons T en un vecteur aléatoire (S,T) de même dimension que (X,Y) par adjonction de la variable aléatoire $S := X$. On va chercher la loi de (S,T) par la méthode du changement de variable. La loi de T, deuxième loi marginale, s'obtiendra alors par intégration partielle de la densité du vecteur. On a ainsi $(S,T) = \varphi(X,Y)$, où φ est définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$(s,t) = \varphi(x,y) = \begin{cases} (x, y/x) & \text{si } x \neq 0, \\ (0,0) & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On vérifie facilement que φ restreinte à l'ouvert $W := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x\neq 0\}$ est une bijection de cet ouvert sur lui même. Son inverse s'écrit

$$(x,y) = \varphi^{-1}(s,t) = (s, st), \quad (s,t) \in \varphi(W) = W.$$

1. Cette concavité peut d'ailleurs se lire directement sur la formule (3). En effet chaque g_k est concave sur $[0,+\infty[$, ce qui s'écrit $g_k(ta+(1-t)b) \geq tg_k(a) + (1-t)g_k(b)$ pour $0 \leq a < b < +\infty$ et tout $t \in [0,1]$. Cette inégalité est héritée par la série $\sum_{k\geq 1} p_k g_k$ en raison de la positivité des p_k.

Le déterminant jacobien de φ^{-1} est donc

$$\operatorname{Jac}(\varphi^{-1})(s,t) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ t & s \end{vmatrix} = s.$$

Les 4 dérivées partielles de φ^{-1} sont des fonctions continues de (s,t) et le jacobien ne s'annule en aucun point de W, on a donc bien un C^1 difféomorphisme de W sur W. Remarquons aussi que $\mathbf{P}\big((X,Y)\notin W\big) = \mathbf{P}(X=0) = 0$ parce que X est une variable aléatoire à densité. On aura donc pour toute fonction H mesurable positive,

$$\int_{\mathbb{R}^2} H \,\mathrm{d}P_{(X,Y)} = \int_W H \,\mathrm{d}P_{(X,Y)}. \tag{6}$$

Soit h borélienne $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$, calculons de deux façons $\mathbf{E}h(S,T)$. D'abord par transfert $\Omega \xrightarrow{(S,T)} \mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{E}h(S,T) = \int_{\mathbb{R}^2} h(s,t)\,\mathrm{d}P_{(S,T)}(s,t). \tag{7}$$

D'autre part comme $\mathbf{E}h(S,T) = \mathbf{E}h\big(\varphi(X,Y)\big)$, le transfert $\Omega \xrightarrow{(X,Y)} \mathbb{R}^2$, (6) et l'expression de la densité f de (X,Y) nous donnent

$$\begin{aligned} \mathbf{E}h(S,T) &= \int_{\mathbb{R}^2} h\big(\varphi(x,y)\big)\,\mathrm{d}P_{(X,Y)}(x,y) \\ &= \int_W h\big(\varphi(x,y)\big)\,\mathrm{d}P_{(X,Y)}(x,y) \\ &= \int_W h\big(\varphi(x,y)\big) g(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\lambda_2(x,y). \end{aligned} \tag{8}$$

Le changement de variable φ est un C^1 difféomorphisme de l'ouvert W sur lui même. Appliqué à l'intégrale (8), il conduit à

$$\mathbf{E}h(S,T) = \int_W h(s,t) g\big(s^2(1+t^2)\big)|s|\,\mathrm{d}\lambda_2(s,t). \tag{9}$$

Les égalités (7) et (9) étant valables pour toute h mesurable positive, leur comparaison montre que la loi $P_{(S,T)}$ du vecteur aléatoire (S,T) est la mesure à densité par rapport à λ_2 :

$$f_{S,T} : \ (s,t) \longmapsto g\big(s^2(1+t^2)\big)|s|\mathbf{1}_W(s,t).$$

La densité f_T de la loi marginale P_T s'en déduit par intégration partielle de $f_{S,T}$:

$$f_T(t) = \int_{\mathbb{R}} g\big(s^2(1+t^2)\big)|s|\mathbf{1}_W(s,t)\,\mathrm{d}\lambda_1(s) \tag{10}$$

En se souvenant que $W = \{(s,t)\in\mathbb{R}^2;\ s\neq 0\}$, on voit que $\mathbf{1}_W(s,t) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}^*}(s)$ (quel que soit $t\in\mathbb{R}$), d'où

$$f_T(t) = \int_{]-\infty,0[} g\big(s^2(1+t^2)\big)|s|\,\mathrm{d}\lambda_1(s) + \int_{]0,+\infty[} g\big(s^2(1+t^2)\big)|s|\,\mathrm{d}\lambda_1(s). \tag{11}$$

Pour calculer ces deux intégrales, rappelons la formule de changement de variable pour une intégrale relative à λ_1. Si I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $\psi : I \to \mathbb{R}$ une application C^1 et strictement monotone sur I, alors pour toute g mesurable positive ou λ_1-intégrable sur $\psi(I)$, on a

$$\int_I g\big(\psi(s)\big)|\psi'(s)|\,\mathrm{d}\lambda_1(s) = \int_{\psi(I)} g(u)\,\mathrm{d}\lambda_1(u). \tag{12}$$

On peut appliquer cette formule avec $I =]-\infty, 0[$ puis $I =]0, +\infty[$ et $\psi(s) = cs^2$ où $c > 0$ est une constante. On obtient ainsi $\int_I g(cs^2)|s|\,\mathrm{d}\lambda_1(s) = (2c)^{-1}\int_{]0,+\infty[} g\,\mathrm{d}\lambda_1$. En revenant à (11), on voit qu'en prenant $c = 1 + t^2$ (qui est bien une constante par rapport à la variable d'intégration s), on obtient :

$$f_T(t) = \frac{1}{1+t^2}\int_{]0,+\infty[} g\,\mathrm{d}\lambda_1. \tag{13}$$

Il nous reste à déterminer la constante $a := \int_{]0,+\infty[} g\,\mathrm{d}\lambda_1$. Une première façon serait d'écrire que f_T étant une densité de probabilité, $\int_{\mathbb{R}} f_T\,\mathrm{d}\lambda_1 = 1$, ce qui donne $a = \frac{1}{\pi}$ après un calcul élémentaire, utilisant l'intégrale de Riemann généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty}(1+t^2)^{-1}\,\mathrm{d}t$. Il n'est pas superflu de chercher la valeur de a par la deuxième méthode, ne serait ce que pour détecter une éventuelle erreur de calcul. On écrit cette fois que $f(x,y) = g(x^2+y^2)$ étant une densité de probabilité par rapport à λ_2, on doit avoir

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_2(x,y) = \int_{\mathbb{R}^2} g(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\lambda_2(x,y) = 1.$$

Par passage en coordonnées polaires dans cette dernière intégrale, on obtient :

$$\begin{aligned} 1 = \int_{]0,+\infty[\times]0,2\pi[} g(r^2)r\,\mathrm{d}\lambda_2(r,\theta) &= \int_{]0,+\infty[} g(r^2)r\left\{\int_{]0,2\pi[}\mathrm{d}\lambda_1(\theta)\right\}\mathrm{d}\lambda_1(r) \\ &= 2\pi\int_{]0,+\infty[} g(r^2)r\,\mathrm{d}\lambda_1(r) \\ &= 2\pi\times\frac{1}{2}\int_{]0,+\infty[} g\,\mathrm{d}\lambda_1, \end{aligned}$$

en utilisant à nouveau la formule de changement de variable (12) avec $\psi(r) = r^2$. On retrouve bien (avec soulagement) $\int_{]0,+\infty[} g\,\mathrm{d}\lambda_1 = 1/\pi$.

En conclusion la loi de la variable aléatoire T admet pour densité par rapport à λ_1 la fonction

$$f_T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, \quad t \mapsto \frac{1}{\pi(1+t^2)}.$$

T suit donc la loi de Cauchy.

Ex 3. Un vecteur aléatoire (X,Y) admet sur $\mathbb{R}^2$ une loi de densité

$$f(x,y) = x\mathrm{e}^{-(x+y)}\,\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\,\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(y).$$

On pose $U = \min(X, Y)$, $V = \max(X, Y)$ et on cherche les densités des lois de (U, V), U, V ainsi que la valeur de $\mathrm{Cov}(U, V)$.

En préliminaire, notons que f est bien une densité de probabilité relativement à λ_2. En effet f est mesurable positive et en appliquant le théorème de Fubini pour les fonctions à variables séparées et la conversion de l'intégrale de Lebesgue en intégrale de Riemann pour une fonction continue d'intégrale généralisée absolument convergente, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} f \,\mathrm{d}\lambda_2 &= \left\{\int_{[0,+\infty[} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}\lambda_1(x)\right\}\left\{\int_{[0,+\infty[} \mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}\lambda_1(y)\right\}\\
&= \left\{\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\right\}\left\{\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y\right\}\\
&= \left\{\left[-x\mathrm{e}^{-x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\right\}\left[-\mathrm{e}^{-y}\right]_0^{+\infty} = 1.
\end{aligned}$$

Le fait que f soit de la forme $f_1 \otimes f_2$ nous dit que X et Y sont des variables aléatoires indépendantes de densité respectives $x \mapsto c_1 x\mathrm{e}^{-x}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$ et $y \mapsto c_2\mathrm{e}^{-y}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(y)$, les constantes c_1 et c_2 étant liées par $c_1c_2 = 1$. On voit immédiatement que $c_2 = 1$ en écrivant que $\int_{\mathbb{R}} c_2\mathrm{e}^{-y}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(y)\,\mathrm{d}\lambda_2(y) = 1$, donc c_1 vaut aussi 1.

1) *Calcul de la densité de la loi $P_{(U,V)}$ de (U, V).* Notons

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (u, v) = \varphi(x, y) = \big(\min(x, y), \max(x, y)\big).$$

Soit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ borélienne quelconque. On calcule de deux façons $\mathbf{E}h(U, V)$.

Première façon : par transfert $\Omega \xrightarrow{(U,V)} \mathbb{R}^2$.

$$\mathbf{E}h(U, V) = \int_\Omega h\big(U(\omega), V(\omega)\big)\,\mathrm{d}\mathbf{P}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^2} h(u, v)\,\mathrm{d}P_{(U,V)}(u, v). \tag{14}$$

Deuxième façon : en notant que $\mathbf{E}h(U, V) = \mathbf{E}\varphi(X, Y)$, on a par le transfert $\Omega \xrightarrow{(X,Y)} \mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{E}h(U, V) = \int_\Omega (h \circ \varphi)\big(X(\omega), Y(\omega)\big)\,\mathrm{d}\mathbf{P}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^2} h\big(\varphi(x, y)\big)\,\mathrm{d}P_{(X,Y)}(x, y). \tag{15}$$

La mesure $P_{(X,Y)}$ ayant pour densité f par rapport à λ_2, on déduit de (15) l'égalité

$$\mathbf{E}h(U, V) = \int_{\mathbb{R}_+^2} h\big(\varphi(x, y)\big)x\mathrm{e}^{-(x+y)}\,\mathrm{d}\lambda_2(x, y). \tag{16}$$

On ne peut pas utiliser directement φ pour faire le changement de variable car elle n'est pas injective sur $\mathbb{R}_+^2$: tout point $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ a même image par φ que son symétrique $(y, x) \in \mathbb{R}_+^2$. On introduit alors le découpage suivant

$$\mathbb{R}_+^2 = \Delta \cup \Delta' \cup D,$$

où

$$\Delta := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 < x < y\}, \quad \Delta' := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 < y < x\}$$

et D est l'union des demi-droites $\{y = 0, x \geq 0\}$, $\{x = y,\ x \geq 0\}$ et $\{x = 0, y \geq 0\}$. Comme $\lambda_2(D) = 0$, on obtient en effectuant ce découpage de l'ensemble d'intégration dans (16) :

$$\mathbf{E}h(U,V) = \int_\Delta h\big(\varphi(x,y)\big)x\mathrm{e}^{-(x+y)}\,\mathrm{d}\lambda_2(x,y) + \int_{\Delta'} h\big(\varphi(x,y)\big)x\mathrm{e}^{-(x+y)}\,\mathrm{d}\lambda_2(x,y). \tag{17}$$

L'intérêt de ce découpage est que la restriction de φ à chacun des ouverts Δ et Δ' est injective et d'expression simple. En effet,

$$\forall (x,y) \in \Delta, \quad \varphi(x,y) = (x,y), \quad \forall (x,y) \in \Delta', \quad \varphi(x,y) = (y,x).$$

Le changement de variable $(x,y) \mapsto (u,v) = \varphi(x,y)$ pour la première intégrale dans (17) est immédiat puisque la restriction de φ à Δ est l'identité. Il s'écrit :

$$\int_\Delta h\big(\varphi(x,y)\big)x\mathrm{e}^{-(x+y)}\,\mathrm{d}\lambda_2(x,y) = \int_\Delta h(u,v)u\mathrm{e}^{-(u+v)}\,\mathrm{d}\lambda_2(u,v). \tag{18}$$

Pour la deuxième intégrale dans (17), on considère la *bijection linéaire* $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (y,x)$ dont la restriction à Δ' coïncide avec φ. La matrice de ψ dans la base canonique est :

$$m(\psi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad |\det \psi| = 1.$$

Par la formule de changement de variable linéaire et bijectif on a donc en notant que $\psi(\Delta') = \Delta$ et que cette fois $x = v$ et $y = u$:

$$\int_{\Delta'} h\big(\varphi(x,y)\big)x\mathrm{e}^{-(x+y)}\,\mathrm{d}\lambda_2(x,y) = \int_\Delta h(u,v)v\mathrm{e}^{-(u+v)}\,\mathrm{d}\lambda_2(u,v). \tag{19}$$

En rassemblant (17), (18) et (19), on aboutit à

$$\begin{aligned} \mathbf{E}h(U,V) &= \int_\Delta h(u,v)(u+v)\mathrm{e}^{-(u+v)}\,\mathrm{d}\lambda_2(u,v) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} h(u,v)(u+v)\mathrm{e}^{-(u+v)}\mathbf{1}_\Delta(u,v)\,\mathrm{d}\lambda_2(u,v). \end{aligned} \tag{20}$$

Les égalités (14) et (20) étant valables pour toute fonction borélienne positive h leur comparaison nous permet de conclure que la loi $P_{(U,V)}$ est la mesure admettant par rapport à λ_2 la densité

$$f_{(U,V)}(u,v) = (u+v)\mathrm{e}^{-(u+v)}\mathbf{1}_\Delta(u,v),$$

où Δ est l'ouvert $\{(u,v) \in \mathbb{R}^2; 0 < u < v\}$.

2) *Calcul des densités f_U de P_U et f_V de P_V.* Les densités par rapport à λ_1 des lois marginales de (U,V) s'obtiennent par intégration partielle de $f_{(U,V)}$. Dans ces intégrations, nous utiliserons les identités

$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{1}_\Delta(u,v) = \mathbf{1}_{\Delta_u}(v) = \mathbf{1}_{\Delta_v}(u).$$

Il convient donc de commencer par préciser les sections Δ_u et Δ_v. On voit immédiatement que :

$$\text{a)}\ \ \Delta_u = \begin{cases} \emptyset & \text{si } u \leq 0 \\ ]u,+\infty[& \text{si } u > 0 \end{cases} \qquad \text{b)}\ \ \Delta_v = \begin{cases} \emptyset & \text{si } v \leq 0 \\ ]0,v[& \text{si } v > 0. \end{cases} \tag{21}$$

Calcul de f_U. Pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$f_U(u) = \int_{\mathbb{R}} (u+v)\mathrm{e}^{-(u+v)} \mathbf{1}_\Delta(u,v)\,\mathrm{d}\lambda_1(v) = \int_{\mathbb{R}} (u+v)\mathrm{e}^{-(u+v)} \mathbf{1}_{\Delta_u}(v)\,\mathrm{d}\lambda_1(v).$$

D'après (21.a), cette intégrale vaut 0 si $u \leq 0$ et peut s'écrire pour $u > 0$ sous la forme

$$f_U(u) = \int_{]u,+\infty[} (u+v)\mathrm{e}^{-(u+v)}\,\mathrm{d}\lambda_1(v) = \int_u^{+\infty} (u+v)\mathrm{e}^{-(u+v)}\,\mathrm{d}v,$$

puisque l'intégrale de Riemann généralisée ainsi introduite est celle d'une fonction continue sur $]u,+\infty[$ et converge absolument. On achève le calcul en intégrant par parties :

$$f_U(u) = \left[-(u+v)\mathrm{e}^{-(u+v)}\right]_u^{+\infty} + \int_u^{+\infty} \mathrm{e}^{-(u+v)}\,\mathrm{d}v = 2u\mathrm{e}^{-2u} + \left[-\mathrm{e}^{-(u+v)}\right]_u^{+\infty} = (2u+1)\mathrm{e}^{-2u}.$$

Finalement, la densité f_U est donnée par

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad f_U(u) = (2u+1)\mathrm{e}^{-2u}\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(u). \tag{22}$$

Calcul de f_V. Pour tout $v \in \mathbb{R}$,

$$f_V(v) = \int_{\mathbb{R}} (u+v)\mathrm{e}^{-(u+v)} \mathbf{1}_\Delta(u,v)\,\mathrm{d}\lambda_1(u) = \int_{\mathbb{R}} (u+v)\mathrm{e}^{-(u+v)} \mathbf{1}_{\Delta_v}(u)\,\mathrm{d}\lambda_1(u).$$

D'après (21.b), cette intégrale vaut 0 si $v \leq 0$ et peut s'écrire pour $v > 0$ sous la forme

$$f_V(v) = \int_{]0,v[} (u+v)\mathrm{e}^{-(u+v)}\,\mathrm{d}\lambda_1(u) = \int_0^v (u+v)\mathrm{e}^{-(u+v)}\,\mathrm{d}u,$$

la conversion en intégrale de Riemann ordinaire étant justifiée par la continuité de $u \mapsto (u+v)\mathrm{e}^{-(u+v)}$ sur $[0,v]$. On achève le calcul en intégrant par parties :

$$\begin{aligned} f_V(v) = \left[-(u+v)\mathrm{e}^{-(u+v)}\right]_0^v + \int_0^v \mathrm{e}^{-(u+v)}\,\mathrm{d}u &= -2v\mathrm{e}^{-2v} + v\mathrm{e}^{-v} + \left[-\mathrm{e}^{-(u+v)}\right]_0^v \\ &= (v+1)\mathrm{e}^{-v} - (2v+1)\mathrm{e}^{-2v}. \end{aligned}$$

Finalement, la densité f_V est donnée par

$$\forall v \in \mathbb{R}, \quad f_V(v) = \big((v+1)\mathrm{e}^{-v} - (2v+1)\mathrm{e}^{-2v}\big)\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(v). \tag{23}$$

Remarque : L'étudiant consciencieux ne manquera pas ici de vérifier la positivité de f_V, par exemple en étudiant le signe de $g(v) := 1 + v - (2v+1)\mathrm{e}^{-v}$ sur $[0,+\infty[$.

3) *Calcul de* $\operatorname{Cov}(U,V)$. Au vu des formules (22) et (23), il est clair que U et V sont de carré intégrable. La covariance de (U,V) est donc bien définie. Calculons la par la formule $\operatorname{Cov}(U,V) = \mathbf{E}(UV) - \mathbf{E}U\mathbf{E}V$. Pour éviter la répétition fastidieuse d'intégrations par parties, rappelons en préambule que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \Gamma(n+1) = n!$$

Les intégrales par rapport à λ_1 apparaissant dans les calculs ci-dessous concernent à chaque fois des fonctions continues sur $[0,+\infty[$, d'intégrales généralisées de Riemann absolument convergentes sur $[0,+\infty[$. Ceci légitime la conversion de ces intégrales de Lebesgue en intégrales généralisées de Riemann.

Calcul de $\mathbf{E}U$ *et de* $\mathbf{E}V$.

$$\begin{aligned}\mathbf{E}U = \int_{\mathbb{R}} u f_U(u)\,\mathrm{d}\lambda_1(u) &= \int_{]0,+\infty[} u(2u+1)\mathrm{e}^{-2u}\,\mathrm{d}\lambda_1(u)\\ &= \int_0^{+\infty} (2u^2+u)\mathrm{e}^{-2u}\,\mathrm{d}u \quad \text{(on pose } t=2u)\\ &= \frac{1}{4}\int_0^{+\infty}(t^2+t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}(2!+1!) = \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}V = \int_{\mathbb{R}} v f_V(v)\,\mathrm{d}\lambda_1(v) &= \int_0^{+\infty} v(v+1)\mathrm{e}^{-v}\,\mathrm{d}v - \int_0^{+\infty} v(2v+1)\mathrm{e}^{-2v}\,\mathrm{d}v\\ &= 2!+1! - \frac{3}{4} = \frac{9}{4}.\end{aligned}$$

Calcul de $\mathbf{E}(UV)$. Puisque l'on connaît la densité de $P_{(U,V)}$, il est assez naturel de calculer $\mathbf{E}(UV)$ en utilisant le transfert $\Omega \xrightarrow{(U,V)} \mathbb{R}^2$, ce qui s'écrit ici :

$$\mathbf{E}(UV) = \int_\Omega U(\omega)V(\omega)\,\mathrm{d}\mathbf{P}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^2} uv f_{(U,V)}(u,v)\,\mathrm{d}\lambda_2(u,v),$$

d'où

$$\mathbf{E}(UV) = \int_\Delta uv(u+v)\mathrm{e}^{-(u+v)}\,\mathrm{d}\lambda_2(u,v).$$

Cette intégrale se calcule ensuite grâce au théorème de Fubini (calcul laissé en exercice).

Il y a néanmoins ici une méthode plus astucieuse basée sur l'expression de UV à l'aide de X et Y :

$$UV = \min(X,Y)\max(X,Y) = XY.$$

Ceci nous permet d'exploiter *l'indépendance* de X et Y (cf. le paragraphe préliminaire avant la solution de la question 1)) pour écrire

$$\mathbf{E}(UV) = \mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}X\mathbf{E}Y = \left\{\int_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\right\}\left\{\int_0^{+\infty} y\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y\right\} = 2!\,1! = 2.$$

Finalement,

$$\operatorname{Cov}(U,V) = 2 - \frac{3}{4}\times\frac{9}{4} = \frac{5}{16}.$$

Ex 4. Soit $(X_n)_{n\geq 3}$ une suite de variables aléatoires discrètes définies sur le même $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ et indépendantes. X_n prend les valeurs $-n$, n et 0 avec les probabilités :

$$\mathbf{P}(X_n = n) = \mathbf{P}(X_n = -n) = \frac{1}{2n\ln n} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n\ln n}.$$

1) Dans cette question, on montre que la suite $(M_n)_{n\geq 3}$ définie par :

$$M_n := \frac{1}{n}\sum_{i=3}^{n} X_i$$

converge vers 0 dans $L^2(\Omega)$ (et donc aussi en probabilité).

Commençons par calculer la variance de X_n, dont l'existence est évidente puisque X_n est une variable aléatoire bornée. On note d'abord que par symétrie de la loi de X_n,

$$\mathbf{E}X_n = -n\mathbf{P}(X_n = -n) + 0 \times \mathbf{P}(X_n = 0) + n\mathbf{P}(X_n = n) = 0.$$

Par conséquent $\operatorname{Var} X_n = \mathbf{E}(X_n^2)$, d'où

$$\operatorname{Var} X_n = (-n)^2\mathbf{P}(X_n = -n) + 0^2 \times \mathbf{P}(X_n = 0) + n^2\mathbf{P}(X_n = n) = \frac{n}{\ln n}.$$

Par indépendance des X_i,

$$\operatorname{Var} M_n = \frac{1}{n^2}\operatorname{Var}\left(\sum_{i=3}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=3}^{n}\operatorname{Var} X_i = \frac{1}{n^2}\sum_{i=3}^{n}\frac{i}{\ln i}.$$

Comme les X_n sont d'espérance nulle, il en est de même pour M_n, par linéarité de l'espérance. Par conséquent, $\operatorname{Var} M_n = \mathbf{E}(M_n^2) = \|M_n - 0\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)}$ et pour prouver que M_n converge vers 0 dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$, il suffit d'établir que

$$v_n := \frac{1}{n^2}\sum_{i=3}^{n}\frac{i}{\ln i} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \tag{24}$$

Remarquons d'abord que s'il n'y avait pas de logarithmes au dénominateur, la limite serait 1/2 puisque pour tout entier $j \geq 1$,

$$\sum_{i=1}^{j} i = \frac{j(j+1)}{2}. \tag{25}$$

Si le terme général dans (24) s'écrivait $\frac{i}{\ln n}$ au lieu de $\frac{i}{\ln i}$, on déduirait de (25) que $v_n = O(1/\ln n)$ et la convergence (24) serait établie. Or on peut se ramener à cette situation, au moins pour le bloc de termes indexé par $n^{1/2} < i \leq n$ puisque $\ln i$ est alors minoré par $\ln(n^{1/2}) = \frac{1}{2}\ln n$. Ceci nous amène à proposer le découpage et les majorations suivants (noter que $\ln 3 > 1$).

$$\begin{aligned} v_n = \frac{1}{n^2}\sum_{3\leq i\leq n^{1/2}}\frac{i}{\ln i} + \frac{1}{n^2}\sum_{n^{1/2}<i\leq n}\frac{i}{\ln i} &\leq \frac{1}{n^2}\sum_{3\leq i\leq n^{1/2}} i + \frac{2}{n^2\ln n}\sum_{n^{1/2}<i\leq n} i \\ &\leq \frac{1}{n^2}\frac{n^{1/2}(n^{1/2}+1)}{2} + \frac{2}{n^2\ln n}\frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Après simplifications, on voit ainsi que $v_n = O(1/\ln n)$, ce qui implique la convergence (24).

La suite de variables aléatoires (M_n) converge donc dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$ vers 0.

2) On montre en raisonnant par l'absurde que (M_n) ne peut converger presque sûrement vers une variable aléatoire réelle Y, c'est à dire vers une application mesurable $Y : \Omega \to \mathbb{R}$. Supposons qu'il existe une telle variable aléatoire Y. Alors en posant

$$\Omega' := \bigl\{\omega \in \Omega;\ M_n(\omega) \xrightarrow[n\to+\infty]{} Y(\omega)\bigr\},$$

on a $\mathbf{P}(\Omega') = 1$. Soit ω quelconque dans Ω'. En écrivant pour $n \geq 4$,

$$\frac{X_n(\omega)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=3}^{n} X_i(\omega) - \frac{1}{n}\sum_{i=3}^{n-1} X_i(\omega) = M_n(\omega) - \frac{n-1}{n} M_{n-1}(\omega),$$

on voit que $n^{-1}X_n(\omega)$ converge vers $Y(\omega) - Y(\omega) = 0$ (noter que Y étant à valeurs dans $\mathbb{R}$, $Y(\omega)$ est *fini*). Comme $\mathbf{P}(\Omega') = 1$ et ω était quelconque dans Ω', on en déduit que $n^{-1}X_n$ converge presque sûrement vers 0. Pour montrer que cette dernière convergence est impossible, on invoque le deuxième lemme de Borel-Cantelli en remarquant que les évènements $A_n := \{X_n = n\}$ forment une suite indépendante et que

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n) = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{2n\ln n} = +\infty.$$

On en déduit que

$$\mathbf{P}\bigl(\limsup_n A_n\bigr) = \mathbf{P}\bigl(\limsup_n \{X_n = n\}\bigr) = 1,$$

autrement dit que presque sûrement la suite $(n^{-1}X_n)_{n\geq 3}$ prend une infinité de fois la valeur 1. Ceci interdit sa convergence presque sûre vers 0. Ainsi l'hypothèse de convergence presque sûre de M_n vers une variable aléatoire réelle Y conduit à une contradiction.

Remarque 1. Dans le raisonnement ci-dessus, la finitude de $Y(\omega)$ jouait un rôle clé. On peut donc légitimement se demander si M_n ne pourrait pas converger p.s. vers une variable aléatoire Y à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. Dans ce cas en appliquant le raisonnement ci-dessus pour les ω tels que $|Y(\omega)| < +\infty$, on voit que nécessairement $\mathbf{P}(|Y| < +\infty) = 0$, d'où la convergence presque sûre de $|M_n|$ vers $+\infty$. Ceci est encore impossible car d'après la question 1), $(|M_n|)_{n\geq 3}$ possède une sous-suite $(|M_{n_k}|)_{k\geq 1}$ qui converge presque sûrement vers 0. On devrait donc avoir sur un évènement Ω'' de probabilité 1 (donc non vide !),

$$\forall \omega \in \Omega'', \quad |M_{n_k}(\omega)| \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad |M_{n_k}(\omega)| \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty,$$

ce qui est absurde.

Remarque 2. Cet exemple de suite (M_n) vérifiant une loi faible des grands nombres (convergence en probabilité) mais pas la loi forte des grands nombres (convergence p.s.) permet de voir la finesse de la loi forte des grands nombres de Kolmogorov. D'après ce théorème, une condition suffisante pour que M_n converge p.s. vers 0 est que la série de terme général $n^{-2}\operatorname{Var} X_n$ converge. Or ici $n^{-2}\operatorname{Var} X_n = (n \ln n)^{-1}$. On voit qu'on manque la convergence de justesse. Si on considère pour un $\varepsilon > 0$ la suite de variables aléatoires discrètes indépendantes X'_n dont la loi est donnée par

$$\mathbf{P}(X'_n = n) = \mathbf{P}(X'_n = -n) = \frac{1}{2n(\ln n)^{1+\varepsilon}} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(X'_n = 0) = 1 - \frac{1}{n(\ln n)^{1+\varepsilon}},$$

la loi forte des grands nombres de Kolmogorov nous donne immédiatement la convergence p.s. vers 0 de la suite correspondante des moyennes arithmétiques M'_n.

Ex 5. *Deux applications de la l.f.g.n. pour des v.a. uniformes*

1) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r. définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, indépendantes, de même loi uniforme sur $[0, 1]$. Rappelons que la loi uniforme sur $[0, 1]$ a une fonction de répartition F donnée par

$$F(x) = \mathbf{P}(X_1 \in]-\infty, x)) = \frac{\lambda(]-\infty, x) \cap [0, 1])}{\lambda([0, 1]} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \min(x, 1) & \text{si } x > 0. \end{cases} \tag{26}$$

et qu'elle admet pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue λ la fonction $\mathbf{1}_{[0,1]}$. On pose $S_n := X_1 + \cdots + X_n$ et $V_n = X_1^2 + \cdots + X_n^2$. On définit la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\geq 1}$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ en posant :

$$Z_n(\omega) = \begin{cases} \frac{V_n(\omega)}{S_n(\omega)} & \text{si } S_n(\omega) \neq 0, \\ 0 & \text{si } S_n(\omega) = 0. \end{cases}$$

Remarquons tout de suite que $\mathbf{P}(S_n = 0) = 0$. En effet pour que S_n soit nul, il est nécessaire que l'un au moins des X_i $(1 \leq i \leq n)$ soit négatif ou nul, d'où $\{S_n = 0\} \subset \bigcup_{i=1}^{n} \{X_i \leq 0\}$. Par sous-additivité finie de $\mathbf{P}$, on en déduit

$$\mathbf{P}(S_n = 0) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(X_i \leq 0) = 0,$$

puisque $\mathbf{P}(X_i \leq 0) = 0$ d'après (26). On en déduit que $\Omega_0 := \cap_{n\geq 1}\{S_n \neq 0\}$ est de probabilité 1 comme intersection *dénombrable* d'évènements de probabilité 1.

Pour étudier la limite de $\mathbf{E}Z_n$ quand n tend vers $+\infty$, on montre d'abord que Z_n converge presque sûrement vers une constante en écrivant $Z_n = (n^{-1}V_n)/(n^{-1}S_n)$ sur Ω_0 et en appliquant la loi forte des grands nombre au numérateur et au dénominateur. En suite on justifie l'interversion limite intégrale par convergence dominée. Voici les détails de ce programme.

Les X_i sont indépendantes, de même loi et $\mathbf{E}|X_1| < +\infty$ (car X_1 est bornée). Par la loi forte des grands nombres (cas i.i.d.) on a donc

$$\frac{1}{n} S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} \mathbf{E}X_1 = \int_{\mathbb{R}} x \mathbf{1}_{[0,1]}(x) \,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_0^1 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}. \tag{27}$$

Les X_i^2 héritent de l'indépendance des X_i, sont aussi de même loi et $\mathbf{E}(X_1^2) < +\infty$. La loi forte des grands nombres nous donne ici

$$\frac{1}{n}V_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} \mathbf{E}(X_1^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2 \mathbf{1}_{[0,1]}(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}. \tag{28}$$

Définissons maintenant

$$\Omega_1 := \Big\{\omega \in \Omega;\ n^{-1}S_n(\omega) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}\Big\}, \quad \Omega_2 := \Big\{\omega \in \Omega;\ n^{-1}V_n(\omega) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{3}\Big\}.$$

D'après (27) et (28), Ω_1 et Ω_2 sont de probabilité 1. Par conséquent l'évènement $\Omega' := \Omega_0 \cap \Omega_1 \cap \Omega_2$ est de probabilité 1 comme intersection de trois évènements de probabilité 1. Par construction de Ω_0, Ω_1 et Ω_2, on a

$$\forall \omega \in \Omega', \quad Z_n(\omega) = \frac{V_n(\omega)}{S_n(\omega)} = \frac{n^{-1}V_n(\omega)}{n^{-1}S_n(\omega)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}.$$

Puisque $\mathbf{P}(\Omega') = 1$, nous venons ainsi d'établir la convergence presque sûre de Z_n vers la constante $2/3$.

Considérons maintenant $\Omega_3 := \bigcap_{i\geq 1}\{0 \leq X_i \leq 1\}$. Il est de probabilité 1 comme intersection *dénombrable* d'évènements de probabilité 1. Cet Ω_3 nous sert à vérifier la domination presque sûre de Z_n par la constante 1 en notant que

$$\forall \omega \in \Omega_3,\ \forall i \geq 1, \quad 0 \leq X_i(\omega) \leq 1, \text{ d'où } 0 \leq X_i(\omega)^2 \leq X_i(\omega).$$

Donc pour tout $\omega \in \Omega_3$ et tout $n \geq 1$, $0 \leq V_n(\omega) \leq S_n(\omega)$ d'où $0 \leq Z_n \leq 1$ (noter que sur $\Omega_3 \cap \Omega_0^c$, $Z_n = 0$ pour les n tels que $S_n = 0$). Nous avons ainsi montré la domination presque sûre de la suite (Z_n) par la constante (donc $\mathbf{P}$ intégrable) 1. Comme (Z_n) converge presque sûrement vers $2/3$, on peut conclure par le théorème de convergence dominée que :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}Z_n = \mathbf{E}\Big(\frac{2}{3}\Big) = \frac{2}{3}.$$

2) En gardant les notations de la question précédente, la loi de $(X_1, \dots, X_n)$ a pour densité $f_{X_1}^{\otimes n} = \mathbf{1}_{[0,1]^n}$ par rapport à λ_n. Comme f est continue sur le compact $[0,1]$, elle y est bornée. Pour $\omega \in \Omega_3$, $n^{-1}S_n(\omega) \in [0,1]$. Par continuité de f, $f\big(n^{-1}S_n(\omega)\big)$ converge vers $f(1/2)$ pour tout $\omega \in \Omega_1 \cap \Omega_3$ et cette convergence est dominée par la constante $\|f\|_\infty$ qui est $\mathbf{P}$-intégrable. En définissant $W_n := f(S_n/n)$ sur $\Omega_1 \cap \Omega_3$ et $W_n := 0$ sur son complémentaire, on a par convergence dominée $\mathbf{E}W_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbf{E}f(1/2) = f(1/2)$. Enfin en appliquant le théorème de transfert, on remarque que

$$\mathbf{E}W_n = \int_\Omega W_n\,\mathrm{d}\mathbf{P} = \int_{\Omega_3} f\Big(\frac{S_n}{n}\Big)\,\mathrm{d}\mathbf{P} = \int_{[0,1]^n} f\Big(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\Big)\,\mathrm{d}\lambda_n(x_1, \dots, x_n),$$

ce qui permet de traduire la convergence de $\mathbf{E}W_n$ vers $f(1/2)$ en le résultat d'analyse proposé par l'énoncé.