Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IFP **Année 2003-04**

Devoir n° 3

À rendre dans la semaine du 8 décembre 2003

Exercice 1

Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, l'intégrale de Riemann impropre

$$u_n = \int_0^1 \frac{(\log x)^n}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

est absolument convergente, puis étudier le comportement asymptotique de la suite $(u_n,\ n \geq 1)$.

Exercice 2

Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ une fonction décroissante λ-intégrable sur $[0, +\infty[$.

1 - Démontrer que

$$x \cdot f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0.$$

Indication. *On pourra comparer les intégrales*

$$\int_0^{+\infty} f \cdot \mathbf{1}_{[\frac{x}{2}, x]}\,d\lambda = \int_{\frac{x}{2}}^{x} f\,d\lambda \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} f\,d\lambda.$$

2 - Peut-on trouver $\alpha > 1$ tel que $x^\alpha \cdot f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0\,?$

Problème

L'intérêt de ce problème est d'étudier des sommes qui pourraient avoir le même rôle d'encadrement et d'approximation que les sommes de Darboux de l'intégrale de Riemann d'une fonction continue sur un intervalle compact dans le cas de l'intégrale de Riemann impropre d'une fonction continue sur $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$.

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$. Nous lui associons deux suites $(\varphi_n,\ n \geq 1)$ et $(\psi_n,\ n \geq 1)$ de fonctions étagées ainsi définies sur $\mathbb{R}^+$:

$$(1) \qquad \forall n \geq 1, \quad \varphi_n = \sum_{k=0}^{n^2-1} a_{n,k} \cdot \mathbf{1}_{[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[} \quad \text{et} \quad \psi_n = \sum_{k=0}^{n^2-1} A_{n,k} \cdot \mathbf{1}_{[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[}$$

où, pour tous entiers $n \geq 1$ et k, $0 \leq k \leq n^2 - 1$,

$$(2) \qquad a_{n,k} = \min\left(f(x)\,,\ \frac{k}{n} \leq x \leq \frac{k+1}{n}\right) \quad \text{et} \quad A_{n,k} = \max\left(f(x)\,,\ \frac{k}{n} \leq x \leq \frac{k+1}{n}\right).$$

Commentaire. Ces suites de fonctions étagées n'ont aucune raison d'être monotones.

1 - Démontrer que

$$(3) \qquad \forall n \geq 1, \quad \varphi_n \leq f \cdot \mathbf{1}_{[0,n[} \leq \psi_n$$

et que

$$(4) \qquad \lim_{n\to+\infty} \varphi_n = \lim_{n\to+\infty} \psi_n = f.$$

Commentaire. Les suites $\left(\int_{\mathbb{R}^+} \varphi_n \, d\lambda\,,\ n \geq 1\right)$ *et* $\left(\int_{\mathbb{R}^+} \psi_n \, d\lambda\,,\ n \geq 1\right)$ *pourraient jouer, pour l'intégrale de Riemann impropre* $\int_{\mathbb{R}^+} f \, d\lambda$*, voir* [1]*, un rôle analogue aux sommes de Darboux. D'après* (3)*,*

$$\int_0^{+\infty} \varphi_n \, d\lambda \leq \int_0^{+\infty} f \, d\lambda \quad \text{et} \quad \int_0^{n} f \, d\lambda \leq \int_0^{+\infty} \psi_n \, d\lambda,$$

mais il n'y a aucune raison que l'on ait $\int_0^{+\infty} f \, d\lambda \leq \int_0^{+\infty} \psi_n \, d\lambda$*, si bien que l'on peut déjà dire que les propriétés d'encadrement des sommes de Darboux ne sont pas vérifiées.*

Nous passons maintenant aux propriétés d'approximation de ces suites d'intégrales.

2 - Démontrer que si f est λ-intégrable sur $\mathbb{R}^+$,

$$(5) \qquad \int_0^{+\infty} \varphi_n \, d\lambda \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} f \, d\lambda.$$

3 - Démontrer que la propriété (5) est également vraie dans le cas où f n'est pas λ-intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

4 - Démontrer que dans le cas où f n'est pas λ-intégrable sur $\mathbb{R}^+$,

$$(6) \qquad \int_0^{+\infty} \psi_n \, d\lambda \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} f \, d\lambda.$$

[1] Il s'agit de $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$, mais on sait que pour une fonction continue ≥ 0, $\int_{\mathbb{R}^+} f \, d\lambda$ et $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ ont la même signification, à condition d'admettre, ce que nous faisons, qu'une intégrale de Riemann impropre puisse valoir $+\infty$. Dans ce problème (et ceci est vrai aussi pour l'exercice 2, sachant que toute fonction monotone sur un intervalle compact est Riemann-intégrable, Lebesgue-intégrable, les intégrales étant égales) toutes les intégrales, qui sont écrites comme des intégrales de Lebesgue, peuvent être considérées comme des intégrales de Riemann.

5 - Nous allons maintenant montrer que la propriété d'approximation (6) peut tomber en défaut dans le cas où f est λ-intégrable sur $\mathbb{R}^+$ en exhibant un contre-exemple.

5.a - On appelle fonction triangulaire de base $[a, b]$ et de hauteur h $(0 \leq a < b,\ h > 0)$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$g(x) = 2h\cdot\frac{x-a}{b-a} \quad \text{si} \quad a \leq x \leq \frac{a+b}{2}\,; \; = 2h\cdot\frac{b-x}{b-a} \quad \text{si} \quad \frac{a+b}{2} \leq x \leq b\,; \; = 0 \quad \text{sinon.}$$

Combien vaut l'intégrale $\displaystyle\int_a^b g\,d\lambda$?

5.b - Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \quad m_n = \frac{s_n + s_{n+1}}{2}, \quad a_n = m_n - \frac{1}{4n^3}, \quad b_n = m_n + \frac{1}{4n^3},$$

et on suppose maintenant que pour tout entier $n \geq 1$, f est égale sur $[a_n, b_n]$ à la fonction triangulaire de base $[a_n, b_n]$ et de hauteur $4n$, et qu'elle est nulle ailleurs. Démontrer que

$$\int_0^{+\infty} f\,d\lambda = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\cdot$$

5.c - Démontrer que

$$\int_0^{+\infty} \psi_n\,d\lambda \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty,$$

ce qui montre que la propriété (6) n'est pas vérifiée.

Indication. Si l'intervalle $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$, $n \geq 1$, $0 \leq k \leq n^2 - 1$, *contient un point de la suite* $(m_n,\ n \geq 1)$, *noté* m_p, *la fonction* ψ_n *vaut au moins* $4p$ *sur l'intervalle* $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[$, *donc*

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \psi_n\,d\lambda \geq \frac{4p}{n}\cdot$$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \psi_n\,d\lambda$ *est donc minorée par la somme de ces quantités. On démontrera que cette somme tend vers* $+\infty$.

6 - La propriété (5) s'étend-elle au cas d'une fonction continue f de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, λ-intégrable sur $\mathbb{R}^+$?