Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IFP **Année 2003-04**

Devoir n° 2 (nouvelle version)
À rendre dans la semaine du 10 novembre 2003

Ex 1. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un ensemble mesuré. Soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{F}$ telle que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n) < +\infty.$$

Notons :

$$A = \{\omega \in \Omega,\ \omega \text{ appartient à une infinité de } E_n\}.$$

1) Exprimer A en fonction des E_n.
2) Montrer que $\mu(A) = 0$.

Ex 2. On note λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Soit A l'ensemble des réels x pour lesquels il existe une infinité de couples d'entiers $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tels que

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \le \frac{1}{q^3}$$

Le but de cet exercice est de montrer que $\lambda(A) = 0$.

1) Vérifier que A contient l'ensemble $\mathbb{Q}_+$ des rationnels positifs. A est donc une partie infinie de $\mathbb{R}$.

2) Vérifier que A est un borélien de $\mathbb{R}$ en traduisant sa définition à l'aide d'opérations ensemblistes dénombrables faisant intervenir les intervalles

$$I_{p,q} := \left[\frac{p}{q} - \frac{1}{q^3}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^3}, \right]$$

où $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

3) Montrer que $\lambda(A) = 0$ si et seulement si $\lambda(B) = 0$ avec $B = [0, 1[\cap A$.

4) Pour $q \in \mathbb{N}^*$, on définit :

$$B_q := [0, 1[\cap \left(\bigcup_{p\in\mathbb{N}} I_{p,q} \right).$$

Montrer que $x \in [0, 1[$ est dans B si et seulement si x appartient à une infinité d'ensembles B_q.

5) Montrer que

$$\lambda(B_q) \leq \frac{2(q+2)}{q^3}.$$

6) En utilisant l'exercice précédent, montrer que $\lambda(B) = 0$.

7) On se propose de montrer que A n'est pas dénombrable. Pour cela, on fixe une suite d'entiers $(j_k)_{k\geq 1}$ telle que pour tout $k \geq 1$, $j_{k+1} > 3j_k$ (par exemple la suite définie par $j_k = 4^k$ a cette propriété). On note C l'ensemble des réels x pouvant s'écrire sous la forme

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{2^{j_k}}, \quad (a_k)_{k\geq 1} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}.$$

Montrer que C est inclus dans A et qu'il est en bijection avec $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$. Conclure.

Ex 3. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré tel que $0 < \mu(\Omega) < +\infty$. On dit qu'un événement A de mesure non nulle est un *atome* de $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ si

$$\forall B \in \mathcal{F}, \quad B \subseteq A \Longrightarrow \mu(B) = 0 \quad \text{ou} \quad \mu(B) = \mu(A).$$

On pourra utiliser le résultat suivant, conséquence directe de la formule de Poincaré : si $A_1, \ldots, A_n$ désignent n (≥ 2) événements dont les intersections deux à deux sont μ-négligeables, alors

$$\mu(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \mu(A_1) + \cdots + \mu(A_n).$$

1) Démontrer que l'on définit une relation d'équivalence $\sim$ dans $\mathcal{F}$ en posant :

$$\forall A, B \in \mathcal{F}, \quad A \sim B \iff \mu(A \Delta B) = 0.$$

Démontrer qu'alors $\mu(A) = \mu(B)$.

2)

2.a) Démontrer que si A est un atome de $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ et si N est un événement μ-négligeable, $A \Delta N$ est un atome de $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ équivalent à A.

2.b) Démontrer que si une classe d'équivalence contient un atome, elle ne contient que des atomes qui ont tous la même mesure.

2.c) Démontrer que si A et B sont deux atomes non-équivalents, $\mu(A \cap B) = 0$.

3) On suppose que $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ possède au moins un atome. On choisit un représentant dans chaque classe d'équivalence formée d'atomes. On note $(A_i,\, i \in I)$ la famille d'atomes ainsi obtenue. Démontrer qu'elle est finie ou infinie dénombrable.

4) On munit $\mathbb{R}$ de la tribu

$$\mathcal{F} = \big\{B\,;\, B \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R})\,,\, B \supseteq [0,1] \quad \text{ou} \quad B^c \supseteq [0,1]\big\},$$

et l'on considère la fonction P sur $\mathcal{F}$ qui ne prend que les valeurs 0 et 1 et vérifie

$$\forall F \in \mathcal{F}, \quad P(F) = 1 \iff F \supseteq [0,1].$$

Démontrer que la fonction P est une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{F})$ et que $[0,1]$ est un atome de $(\mathbb{R}, \mathcal{F}, P)$.