Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IFP **Année 2003-04**

Corrigé du Devoir n° 2

Ex 1. *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un ensemble mesuré. Soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{F}$ telle que*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n) < +\infty.$$

Notons :

$$A = \{\omega \in \Omega,\ \omega \textit{ appartient à une infinité de } E_n\}.$$

1) *Exprimer A en fonction des E_n.*

$$\begin{aligned} \omega \text{ appartient à une infinité de } E_n &\iff \forall N \geq 0, \exists n \geq N, \omega \in E_n \\ &\iff \omega \in \bigcap_{N\geq 0} \bigcup_{n\geq N} E_n \end{aligned}$$

d'où

$$A = \bigcap_{N\geq 0} \bigcup_{n\geq N} E_n.$$

2) *Montrer que $\mu(A) = 0$.*
Notons pour $N \geq 0$,

$$B_N = \bigcup_{n\geq N} E_n.$$

La suite $(B_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'éléments de la tribu $\mathcal{F}$. Elle converge vers

$$A := \bigcap_{N\geq 0} B_N.$$

Pour tout $N \geq 0$, on a

$$\mu(B_N) \leq \sum_{k=N}^{+\infty} \mu(E_k) < +\infty.$$

Donc $\mu(B_0) < +\infty$ et, par continuité monotone séquentielle de la mesure,

$$\mu(A) = \lim_{N\to+\infty} \mu(B_N) \leq \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=N}^{+\infty} \mu(E_k) = 0$$

car c'est le reste d'une série convergente. D'où $\mu(A) = 0$.

Ex 2. *On note λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Soit A l'ensemble des réels x pour lesquels il existe une infinité de couples d'entiers $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tels que*

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^3}$$

Le but de cet exercice est de montrer que $\lambda(A) = 0$.

1) *Vérifier que A contient l'ensemble $\mathbb{Q}_+$ des rationnels positifs. A est donc une partie infinie de $\mathbb{R}$.*

Si $x \in \mathbb{Q}_+$, alors il existe deux entiers naturels r et s ($s \neq 0$) tels que $x = \dfrac{r}{s}$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \frac{r}{s} = \frac{nr}{ns}$$

d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \left| x - \frac{nr}{ns} \right| = 0 < \frac{1}{(ns)^3}.$$

Il existe donc bien une infinité de couples d'entiers naturels (p,q) ($q \neq 0$) vérifiant la condition demandée.

2) *Vérifier que A est un borélien de $\mathbb{R}$ en traduisant sa définition à l'aide d'opérations ensemblistes dénombrables faisant intervenir les intervalles*

$$I_{p,q} := \left[\frac{p}{q} - \frac{1}{q^3}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^3}, \right]$$

où $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
& x \in A \\
\iff \; & \text{il existe une infinité de } (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \text{ tels que } \left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^3} \\
\iff \; & \text{il existe une infinité de } (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \text{ tels que } x \in I_{p,q} \\
\iff \; & \text{il existe une infinité de } (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \text{ tels que } qx - \frac{1}{q^2} \leq p \leq qx + \frac{1}{q^2}
\end{aligned}$$

Or un intervalle de longueur $2/q^2$ contient au plus trois entiers, d'où

$$\begin{aligned}
& x \in A \\
\iff \; & \text{il existe une infinité de } q \in \mathbb{N}^* \text{ et il existe } p \text{ vérifiant } qx - \frac{1}{q^2} \leq p \leq qx + \frac{1}{q^2} \\
\iff \; & \text{il existe une infinité de } q \in \mathbb{N}^* \text{ tels que } x \in \bigcup_{p \in \mathbb{N}} I_{p,q} \\
\iff \; & \forall q \in \mathbb{N}^*, \quad \exists q' \geq q, \quad x \in \bigcup_{p \in \mathbb{N}} I_{p,q'} \\
\iff \; & x \in \bigcap_{q \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{q' \geq q} \bigcup_{p \in \mathbb{N}} I_{p,q'}
\end{aligned}$$

d'où

$$A = \bigcap_{q\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{q'\geq q} \bigcup_{p\in\mathbb{N}} I_{p,q'}$$

est bien un borélien de $\mathbb{R}$.

3) *Montrer que $\lambda(A) = 0$ si et seulement si $\lambda(B) = 0$ avec $B = [0,1[\cap A$.*

L'implication $\lambda(A) = 0 \Longrightarrow \lambda(B) = 0$ est évidente, B étant inclus dans A.

Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et pour tout $x \in B$:

$$\left|x + n - \frac{p+nq}{q}\right| = \left|x - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^3}$$

donc $x + n \in A$. De même pour tout x dans A, il existe $n \in \mathbb{Z}$ et $\alpha \in B$ tels que $x = n + \alpha$. On a donc

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (B + n).$$

Supposons maintenant que $\lambda(B) = 0$. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\lambda(B+n) = 0$ en raison de l'invariance de λ par translation, d'où

$$\lambda(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda(B + n) = 0.$$

D'où l'équivalence.

4) *Pour $q \in \mathbb{N}^*$, on définit : $B_q := [0,1[\cap \left(\bigcup_{p\in\mathbb{N}} I_{p,q}\right)$.*

Montrer que $x \in [0,1[$ est dans B si et seulement si x appartient à une infinité d'ensembles B_q.

D'après la question 2) :

$$\begin{aligned} x \in B &\iff x \in [0,1[\cap A \\ &\iff \text{il existe une infinité de } q \in \mathbb{N}^* \text{ tels que } x \in \bigcup_{p\in\mathbb{N}} I_{p,q} \bigcap [0,1[\\ &\iff \text{il existe une infinité de } q \in \mathbb{N}^* \text{ tels que } x \in B_q. \end{aligned}$$

5) *Montrer que*

$$\lambda(B_q) \leq \frac{2(q+2)}{q^3}.$$

Remarquons que

$$\frac{p}{q} - \frac{1}{q^3} \leq x \leq \frac{p}{q} + \frac{1}{q^3} \iff qx - \frac{1}{q^2} \leq p \leq qx + \frac{1}{q^2} \tag{1}$$

et si $x \in [0,1[$

$$(1) \Longrightarrow -\frac{1}{q^2} \leq p < q + \frac{1}{q^2} \Longrightarrow 0 \leq p < q + 1.$$

Par conséquent

$$\forall q \geq 1 \qquad \{p \in \mathbb{N},\, I_{p,q} \cap [0,1[\neq \emptyset\} \subset \{p \in \mathbb{N},\, 0 \leq p < q+1\}.$$

D'autre part

$$B_q = [0,1[\bigcap \left(\bigcup_{p\in\mathbb{N}} I_{p,q} \right) = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \left(I_{p,q} \bigcap [0,1[\right).$$

On a donc

$$\lambda(B_q) \leq \sum_{p\in\mathbb{Z}} \lambda\left(I_{p,q} \bigcap [0,1[\right) \leq \sum_{0\leq p<q+1} \lambda(I_{p,q}) = \frac{2(q+1)}{q^3}.$$

6) *En utilisant l'exercice précédent, montrer que $\lambda(B) = 0$.*

D'après la question précédente :

$$\sum_{q\geq 1} \lambda(B_q) \leq \sum_{q\geq 1} \frac{2(q+2)}{q^3} < +\infty.$$

Il suffit alors d'appliquer l'exercice prédédent pour obtenir $\lambda(B) = 0$ et donc $\lambda(A) = 0$.

7) *On se propose de montrer que A n'est pas dénombrable. Pour cela, on fixe une suite d'entiers $(j_k)_{k\geq 1}$ telle que pour tout $k \geq 1$, $j_{k+1} > 3j_k$ (par exemple la suite définie par $j_k = 4^k$ a cette propriété). On note C l'ensemble des réels x pouvant s'écrire sous la forme*

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{2^{j_k}}, \quad (a_k)_{k\geq 1} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}.$$

Montrer que C est inclus dans A et qu'il est en bijection avec $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$. Conclure.

Soit $x \in C$,

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{2^{j_k}}, \quad (a_k)_{k\geq 1} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}.$$

Soit $n \geq 1$, posons

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2^{j_k}},$$

on peut écrire $x_n = p_n/q_n$ avec $q_n = 2^{j_n}$. On a :

$$x - x_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a_k}{2^{j_k}} = \frac{1}{2^{j_{n+1}}} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a_k}{2^{j_k - j_{n+1}}} \leq \frac{2}{2^{j_{n+1}}} = \frac{1}{2^{j_{n+1}-1}} \leq \frac{1}{2^{3j_n}},$$

en effet $j_{n+1} > 3j_n$ et comme les j_k sont entiers, $j_{n+1} - 1 \geq 3j_n$. On peut encore écrire

$$\forall n \geq 1, \quad \exists (p_n, q_n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq x - \frac{p_n}{q_n} \leq \frac{1}{q_n^3}.$$

Ce qui prouve que x appartient à A. Donc $C \subset A$.

Montrons que C n'est pas dénombrable. Pour cela considérons l'application suivante :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \{0,1\}^{\mathbb{N}^*} & \longrightarrow & C \\ (a_k)_{k\in\mathbb{N}} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{2^{j_k}} \end{array} \right.$$

Il est clair par construction que φ est surjective. Montrons que φ est aussi injective. Pour cela considérons deux suites distinctes $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ d'images a et b par φ tels que

$$a = b \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{2^{j_k}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b_k}{2^{j_k}}$$

On pose

$$k_0 := \sup\{n \in \mathbb{N} \quad ; \quad \forall k < n \quad a_k = b_k\}.$$

Les suites étant distinctes, k_0 est fini. Alors, en supposant $a_{k_0} = 1$ et $b_{k_0} = 0$ (on sait qu'il sont distincts dans $\{0,1\}$) :

$$a - b = \frac{1}{2^{j_{k_0}}} + \sum_{k=k_0+1}^{+\infty} \frac{a_k - b_k}{2^{j_k}}$$

Mais

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=k_0+1}^{+\infty} \frac{a_k - b_k}{2^{j_k}} \right| &\leq \sum_{k=k_0+1}^{+\infty} \frac{|a_k - b_k|}{2^{j_k}} \leq \sum_{k=k_0+1}^{+\infty} \frac{1}{2^{j_k}} \\ &\leq \frac{1}{2^{j_{k_0+1}}} \sum_{k=k_0+1}^{+\infty} \frac{1}{2^{j_k - j_{k_0+1}}} \\ &\leq \frac{1}{2^{j_{k_0+1}}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \\ &\leq \frac{2}{2^{j_{k_0+1}}} \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{1}{2^{j_{k_0}}} - \frac{2}{2^{j_{k_0+1}}} \leq a - b \leq \frac{1}{2^{j_{k_0}}} + \frac{2}{2^{j_{k_0+1}}}$$

et

$$a - b \geq \frac{2^{j_{k_0+1}} - 2^{j_{k_0}+1}}{2^{j_{k_0}+j_{k_0+1}}} > \frac{(2^3-2)2^{j_{k_0}}}{2^{j_{k_0}+j_{k_0+1}}} > 0$$

par croissance des j_k : $j_{k+1} > 3j_k$ $(k \geq 1)$, ce qui contredit l'hypothèse $a = b$. Donc φ est injective.

Par suite φ réalise une bijection entre C et $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ qui est non dénombrable. C est donc non dénombrable. Il en est de même pour A.

Ex 3. *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré tel que $0 < \mu(\Omega) < +\infty$. On dit qu'un événement A de mesure non nulle est un* atome *de $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ si*

$$\forall B \in \mathcal{F}, \quad B \subseteq A \Longrightarrow \mu(B) = 0 \quad \text{ou} \quad \mu(B) = \mu(A).$$

On pourra utiliser le résultat suivant, conséquence directe de la formule de Poincaré : si $A_1, \ldots, A_n$ désignent n (≥ 2) événements dont les intersections deux à deux sont μ-négligeables, alors

$$\mu(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \mu(A_1) + \cdots + \mu(A_n).$$

1) *Démontrer que l'on définit une relation d'équivalence $\sim$ dans $\mathcal{F}$ en posant :*

$$\forall A, B \in \mathcal{F}, \quad A \sim B \iff \mu(A \Delta B) = 0.$$

Démontrer qu'alors $\mu(A) = \mu(B)$.

La relation est clairement réflexive et symétrique. Pour montrer la transitivité, il suffit de constater que :

$$A \Delta C \subset (A \Delta B) \cup (B \Delta C).$$

En effet :

$$\begin{cases} A \cap C^c = (A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C^c) \subset (B \cap C^c) \cup (A \cap B^c) \\ A^c \cap C = (A^c \cap B \cap C) \cup (A^c \cap B^c \cap C) \subset (A^c \cap B) \cup (B^c \cap C) \end{cases}$$

d'où

$$\begin{aligned} A \Delta C &= (A \cap C^c) \cup (A^c \cap C) \\ &\subset (B \cap C^c) \cup (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \cup (B^c \cap C) = (A \Delta B) \cup (B \Delta C). \end{aligned}$$

Montrons que pour deux éléments A et B de la même classe d'équivalence

$$\mu(A) = \mu(B).$$

On a :

$$A \Delta B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B).$$

Puisque par définition $\mu(A \Delta B) = 0$, on a $\mu(A \cap B^c) = \mu(A^c \cap B) = 0$. Mais

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \quad \text{et} \quad B = (B \cap A) \cup (B \cap A^c)$$

d'où

$$\mu(A) = \mu(A \cap B) = \mu(B).$$

2)

2.a) *Démontrer que si A est un atome de $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ et si N est un événement μ-négligeable, $A\Delta N$ est un atome de $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ équivalent à A.*

Remarquons tout d'abord que $A\Delta N$ n'est pas de μ-mesure nulle. En effet, s'il l'était, on aurait $A \sim N$ et d'après la question précédente $\mu(A) = \mu(N) = 0$ ce qui est contraire au fait que A soit un atome.
Soit $B \in \mathcal{F}$ tel que $B \subseteq A\Delta N$. Montrons qu'alors $\mu(B) = 0$ ou $\mu(B) = \mu(A\Delta N)$. On a :

$$B = B \cap (A\Delta N) = (B \cap A \cap N^c) \cup (B \cap A^c \cap N)$$

d'où puisque $B \cap A^c \cap N \subset N$ et que N est de mesure nulle :

$$\mu(B) = \mu(B \cap A \cap N^c).$$

Maintenant $B \cap A \cap N^c \subseteq A$ et comme A est un atome : ou bien

$$\mu(B \cap A \cap N^c) = \mu(B) = 0,$$

ou bien $\mu(B \cap A \cap N^c) = \mu(B) = \mu(A)$, mais

$$\mu(A\Delta N) = \mu(A) + \mu(N) - 2\mu(A \cap N) = \mu(A)$$

d'où $\mu(B) = \mu(A\Delta N)$. Ce qui prouve que $A\Delta N$ est un atome.
Montrons maintenant qu'il est équivalent à A. Pour cela montrons que

$$(A\Delta N)\Delta A = N,$$

on aura alors $\mu((A\Delta N)\Delta A) = 0$.
On a :

$$\begin{aligned}
(A\Delta N)\Delta A &= ((A \cap N^c) \cup (A^c \cap N))\Delta A \\
&= (((A \cap N^c)^c \cap (A^c \cap N)^c) \cap A) \cup (((A \cap N^c) \cup (A^c \cap N)) \cap A^c) \\
&= ((A^c \cup N) \cap (A \cup N^c) \cap A) \cup (A^c \cap N) \\
&= ((A^c \cup N) \cap A) \cup (A^c \cap N) \\
&= (N \cap A) \cup (A^c \cap N) \\
&= N
\end{aligned}$$

2.b) *Démontrer que si une classe d'équivalence contient un atome, elle ne contient que des atomes qui ont tous la même mesure.*

Soit B un élément de la classe d'équivalence contenant l'atome A. Alors $A\Delta B$ est un évènement μ-négligeable. On applique la question précédente : $A\Delta(A\Delta B)$ est un atome à A. Mais $A\Delta(A\Delta B) = B$. On a donc bien que B est un atome. Le fait que tous les atomes équivalents aient la même mesure vient de la question 1).

2.c) *Démontrer que si A et B sont deux atomes non-équivalents, $\mu(A \cap B) = 0$.*

On a $A \cap B \subset A$ qui est un atome, donc ou bien $\mu(A \cap B) = 0$ ou bien $\mu(A \cap B) = \mu(A)$. Supposons $\mu(A \cap B) \neq 0$ donc $\mu(A \cap B) = \mu(A)$. Comme $A \cap B \subset B$ qui est aussi un atome, on a $\mu(A \cap B) = \mu(B)$. Mais $\mu(A\Delta B) = \mu(A) + \mu(B) - 2\mu(A \cap B)$, donc $\mu(A\Delta B) = 0$ ce qui est contraire à l'hypothèse. On a donc $\mu(A \cap B) = 0$.

3) *On suppose que* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *possède au moins un atome. On choisit un représentant dans chaque classe d'équivalence formée d'atomes. On note* $(A_i,\, i \in I)$ *la famille d'atomes ainsi obtenue. Démontrer qu'elle est finie ou infinie dénombrable.*

Soit $\tilde{A}$ l'ensemble des $(A_i,\, i \in I)$ et pour tout $n \geq 1$

$$\tilde{A}_n = \left\{ A \in \tilde{A}\,,\ \mu(A) > \frac{M}{n} \right\} \qquad \text{où} \qquad M = \mu(\Omega) < +\infty.$$

Le cardinal de $\tilde{A}_n$ est strictement inférieur à n. En effet, supposons que $\tilde{A}_n$ contienne n éléments de A disons $A_1, \ldots, A_n$. Alors compte tenu de la définition des A_i et de la question précédente :

$$\mu(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \mu(A_1) + \mu(A_2) + \cdots + \mu(A_n) > n\frac{M}{n} = M$$

ce qui contredit la définition de M. Or

$$\tilde{A} = \bigcup_{n \geq 1} \tilde{A}_n$$

ce qui prouve que la famille $\tilde{A}$ est au plus dénombrable, comme union dénombrable d'ensemble finis.

4) *On munit* $\mathbb{R}$ *de la tribu*

$$\mathcal{F} = \big\{ B\,;\, B \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R})\,,\, B \supseteq [0,1] \quad \text{ou} \quad B^c \supseteq [0,1] \big\},$$

et l'on considère la fonction P *sur* $\mathcal{F}$ *qui ne prend que les valeurs 0 et 1 et vérifie*

$$\forall F \in \mathcal{F}, \quad P(F) = 1 \iff F \supseteq [0,1].$$

Démontrer que la fonction P *est une probabilité sur* $(\mathbb{R}, \mathcal{F})$ *et que* $[0,1]$ *est un atome de* $(\mathbb{R}, \mathcal{F}, P)$*.*

On a clairement $P(\emptyset) = 0$.

Soit $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{F}$ deux à deux disjoints et $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$.

Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(F_n) = 0$ alors $[0,1] \subseteq F_n^c$ et $F^c = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n^c$ contient $[0,1]$. D'où

$$P(F) = 0 = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(F_n).$$

Sinon, les F_n étant disjoints, il existe un unique n_0 tel que $P(F_{n_0}) = 1$. On a alors

$$P(F) = 1 = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(F_n).$$

Ce qui prouve que P est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{F})$ et une probabilité puisque $P(\mathcal{F}) = 1$.

On a $P([0,1]) = 1 \neq 0$. Soit $B \subseteq [0,1]$ un élément de $\mathcal{F}$, alors soit $B = [0,1]$ et dans ce cas $P(B) = P([0,1]) = 1$, soit $B \subsetneq [0,1]$ et dans ce cas puisque $B \in \mathcal{F}$, $[0,1] \subseteq B^c$ donc

$$B \subsetneq [0,1] \subseteq B^c,$$

d'où $B = \emptyset$ et $P(B) = 0$. Ceci montre bien que $[0,1]$ est un atome.

Ex 4. Exercice 3 de la version antérieure

Soit $(X, \mathcal{B})$ un espace mesurable. On dit qu'un élément A de $\mathcal{B}$ est un atome si A est non vide et si on a :

$$\forall B \in \mathcal{B} \quad B \subset A \Longrightarrow (B = \emptyset \text{ ou } B = A).$$

1) *Montrer que la collection des atomes est une famille de parties deux à deux disjointes.*

Soit A_1 et A_2 deux atomes distincts. Considérons $A := A_1 \cap A_2$. Si A est non vide, alors $A \subset A_1$ implique $A = A_1$ et de même $A \subset A_2$ implique $A = A_2$. D'où $A_1 = A_2$ ce qui contredit l'hypothèse. Les atomes sont donc deux à deux disjoints.

On dit que l'espace mesurable $(X, \mathcal{B})$ est atomique si tout élément de $\mathcal{B}$ est réunion d'atomes de $\mathcal{B}$.

2) *Montrer que $(X, \mathcal{B})$ est atomique si et seulement si la collection des atomes est une partition de X.*

Supposons l'espace atomique, alors tout élément de $\mathcal{B}$ est réunion d'atomes, donc en particulier X est réunion d'atomes, et comme les atomes sont deux à deux disjoints et qu'ils sont tous inclus dans X, la collection des atomes est une partition de X.

Réciproquement, supposons que $X = \bigcup_{i \in I} A_i$, où $\{A_i, i \in I\}$ est la collection des atomes de $\mathcal{B}$. Soit $B \in \mathcal{B}$, $B \neq \emptyset$, et soit $x \in B$. Comme on a une partition de X, il existe un atome A_x tel que $x \in A_x$. On a alors, $A_x \cap B \neq \emptyset$ et $A_x \cap B \subset A_x$ donc $A_x \cap B = A_x$, on a donc

$$B = \bigcup_{x \in B} \{x\} \subset \bigcup_{x \in B} A_x \subset B,$$

ce qui prouve que B peut s'écrire comme réunion d'atomes de $\mathcal{B}$.

3) *Montrer que $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est atomique.*

Pour cela, nous allons montrer que les singletons sont des boréliens et que ce sont les seuls atomes de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\{x\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left] x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right[\in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Il est clair que $A \subset \{x\}$ implique que $A = \{x\}$ ou $A = \emptyset$. Ceci montre que les singletons sont des atomes. Réciproquement, si A est un atome de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, il existe $x \in A$. On a $\{x\} \subset A$ d'où $A = \{x\}$. Ce qui prouve que $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ est atomique.

4) *On suppose que $\mathcal{B}$ admet un atome A. On définit μ_A sur $\mathcal{B}$ par $\mu_A(B) = 1$ si $A \subset B$ et $\mu_A(B) = 0$ sinon. Montrons que μ_A est une mesure.*

On a clairement $\mu_A(\emptyset) = 0$.

Soit $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{B}$ deux à deux disjoints. Alors si $A \cap \cup B_i = \emptyset$, alors

$$\mu_A\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i\right) = 0 = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu_A(B_i).$$

Maintenant s'il existe $x \in A \bigcap \left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i \right)$, alors il existe un unique i_0 tel que $x \in B_{i_0} \cap A$. Mais $B_{i_0} \cap A \subset A$ et A est un atome, donc $B_{i_0} \cap A = A$. D'où $A \subset \cup B_i$ et $\mu_A(\cup B_i) = 1$. D'autre part $A \subset B_{i_0}$ et $\mu_A(B_{i_0}) = 1$. De plus pour tout i différent de i_0, $A \cap B_i = \emptyset$ et $\mu_A(B_i) = 0$. D'où

$$\mu_A \left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i \right) = 1 = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu_A(B_i).$$