Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IFP **Année 2001-02**

Devoir 1

À rendre dans la semaine du 20 octobre 2002

Ex 1. *Probabilité de gagner un jeu sur son service au tennis*

On considère le modèle simplifié suivant du jeu de tennis[1] : le joueur A est au service et affronte B. Un « jeu » est constitué d'un certain nombre d' « échanges » et à la fin de chaque « échange », celui des deux joueurs qui a gagné l'échange marque un point. Le joueur qui gagne le « jeu » est le premier à totaliser au moins 4 points *avec* au moins deux points d'avance sur son adversaire. A peut donc gagner le jeu sur le score de 4 à 0, 4 à 1, 4 à 2, 5 à 3, 6 à 4,... On suppose que tous les échanges sont indépendants et que lors de chaque échange la probabilité pour A de gagner le point reste constante et vaut p. Notre objectif est de calculer en fonction de p la probabilité que A remporte le jeu. On introduit les notations d'événements suivantes.

$$\begin{aligned} G &= \{A \text{ gagne le jeu}\}, \\ A_n &= \{\ A \text{ gagne le } n\text{-ième échange }\}, \\ B_n &= \{\ B \text{ gagne le } n\text{-ième échange }\}, \\ E_{i,j} &= \{\text{Au bout de } i+j \text{ échanges, } A \text{ a } i \text{ points et } B \text{ en a } j\}. \end{aligned}$$

1) Expliquez la décomposition

$$G = E_{4,0} \cup E_{4,1} \cup E_{4,2} \cup \left(\bigcup_{k=3}^{+\infty} E_{k+2,k} \right).$$

2) Calculer $P(E_{4,0})$, $P(E_{4,1})$ et $P(E_{4,2})$. *Indication :* on remarquera que $E_{4,1} = A_5 \cap E_{3,1}$ et $E_{4,2} = A_6 \cap E_{3,2}$ et on utilisera l'indépendance des échanges.

3) Expliquer pourquoi pour tout $k \geq 3$, on a :

$$E_{k+2,k} = E_{3,3} \cap \left(\bigcap_{j=4}^{k} C_j \right) \cap A_{2k+1} \cap A_{2k+2},$$

où l'on a posé $C_j := (A_{2j-1} \cap B_{2j}) \cup (B_{2j-1} \cap A_{2j})$.

4) Calculer $P(E_{3,3})$, puis $r = P(C_j)$. En déduire $P(E_{k+2,k})$.

5) Montrer que les $E_{k+2,k}$ sont deux à deux disjoints et calculer $P\left(\bigcup_{k=3}^{+\infty} E_{k+2,k} \right)$.

---

[1] Il n'est pas nécessaire de connaître les règles classiques du tennis pour faire cet exercice. Elles sont rappelées dans l'énoncé sous une forme permettant de simplifier les écritures.

6) En déduire $P(G)$.

7) L'événement $N = \{$le jeu continue indéfiniment sans vainqueur$\}$ s'écrit :

$$N = E_{3,3} \cap \Big(\bigcap_{j=4}^{+\infty} C_j \Big).$$

Montrer que sa probabilité est nulle.

8) Compte tenu du résultat de la question précédente, pouvez vous donner sans calcul la valeur de $P(G)$ lorsque $p = 1/2$? Utilisez cette réponse pour tester la formule trouvée à la question 6.

Ex 2. *Le lemme de Fatou pour les séries*

1) Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels. Montrer que

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n + \liminf_{n\to+\infty} b_n \leq \liminf_{n\to+\infty} (a_n + b_n)$$

et que cette inégalité est vérifiée aussi lorsque $(a_n)_{n_i n\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n_i n\mathbb{N}}$ sont deux suites d'éléments de $_+$.

2) En déduire le lemme de Fatou pour les séries : si $(u_{n,k})_{n\in\mathbb{N},k\in\mathbb{N}}$ est une suite double d'éléments de $_+$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \liminf_{n\to+\infty} u_{n,k} \leq \liminf_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} u_{n,k}.$$

3) Donner un exemple où l'inégalité est stricte.