Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IFP **Année 2003-04**

Corrigé du Devoir n° 1

Ex 1. *Probabilité de gagner un jeu sur son service au tennis*
On considère le modèle simplifié suivant du jeu de tennis : le joueur A est au service et affronte B. Un « jeu » est constitué d'un certain nombre d' « échanges » et à la fin de chaque « échange », celui des deux joueurs qui a gagné l'échange marque un point. Le joueur qui gagne le « jeu » est le premier à totaliser au moins 4 points *avec* au moins deux points d'avance sur son adversaire. On suppose que tous les échanges sont indépendants et que lors de chaque échange la probabilité pour A de gagner le point reste constante et vaut p. Notre objectif est de calculer en fonction de p la probabilité de $G := \{A \text{ gagne le jeu}\}$. On introduit les notations d'événements suivantes.

$$\begin{aligned} A_n &:= \{\ A \text{ gagne le } n\text{-ième échange }\}, \quad B_n := \{\ B \text{ gagne le } n\text{-ième échange }\},\\ E_{i,j} &:= \{\text{Au bout de } i+j \text{ échanges, } A \text{ a } i \text{ points et } B \text{ en a } j\}.\end{aligned}$$

1) A peut gagner avec 4 points si le score est 4 à 0 ou 4 à 1 ou 4 à 2, autrement dit si l'un des évènements $E_{4,0}$, $E_{4,1}$ ou $E_{4,2}$ se réalise. On a donc

$$G' := \{\ A \text{ gagne le jeu avec 4 points }\} = E_{4,0} \cup E_{4,1} \cup E_{4,2}.$$

L'autre possibilité est que A gagne avec plus de 4 points et cela se produit si et seulement si le jeu se termine sur un score 5 à 3 ou 6 à 4 ou 7 à 5 ou..., bref sur un score de la forme $k+2$ à k pour k décrivant l'ensemble de tous les nombres entiers à partir de 3. Ceci correspond à la réalisation de l'un des évènements de la suite infinie $(E_{k+2,k})_{k\geq 3}$. Ainsi

$$G'' := \{\ A \text{ gagne le jeu avec plus de 4 points }\} = \bigcup_{k\geq 3} E_{k+2,k}.$$

Il est clair que $G = G' \cup G''$, d'où la décomposition

$$G = E_{4,0} \cup E_{4,1} \cup E_{4,2} \cup \Big(\bigcup_{k\geq 3} E_{k+2,k} \Big). \tag{1}$$

2) *Calcul de $P(E_{4,0})$, $P(E_{4,1})$ et $P(E_{4,2})$.*
Comme $E_{4,0} = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$, l'indépendance des échanges nous donne :

$$P(E_{4,0}) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4) = p^4.$$

Le gain du jeu par A sur le score de 4 à 1 (évènement $E_{4,1}$) se réalise si et seulement si A gagne le cinquième échange (A_5) et B marque un seul point lors des quatre premiers échanges ($E_{3,1}$). Ainsi $E_{4,1} = A_5 \cap E_{3,1}$. En considérant les 5 premiers échanges comme indépendants[1] on a donc $P(E_{4,1}) = P(E_{3,1})P(A_5) = P(E_{3,1})p$. On remarque que $P(E_{3,1})$ est la probabilité que A ait exactement trois succès dans une suite de 4 épreuves répétées indépendantes, c'est donc $C_4^3 p^3(1-p) = 4p^3(1-p)$. On a donc

$$P(E_{4,1}) = P(E_{3,1})p = 4p^4(1-p).$$

Par un raisonnement analogue, on voit que $E_{4,2} = A_6 \cap E_{3,2}$ et

$$P(E_{4,2}) = P(E_{3,2})P(A_6) = C_5^3 p^3(1-p)^2 p = 10p^4(1-p)^2.$$

3) Pour tout $k \geq 3$, on a :

$$E_{k+2,k} = E_{3,3} \cap \Bigl(\bigcap_{4 \leq j \leq k} C_j \Bigr) \cap A_{2k+1} \cap A_{2k+2}, \tag{2}$$

où l'on a posé $C_j := (A_{2j-1} \cap B_{2j}) \cup (B_{2j-1} \cap A_{2j})$. Pour justifier cette décomposition, on remarque que $E_{k+2,k}$ est aussi l'évènement « A *gagne* le jeu avec $k+2$ points contre k à B ». Le jeu dure donc dans ce cas $(2k+2)$ échanges, donc au moins 8 échanges puisque $k \geq 3$. Celà implique l'égalité des 2 joueurs au bout des 6 premiers échanges. En effet, compte tenu des règles sur le gain du jeu, les seuls scores possibles au bout de 6 échanges sont 4 à 2 (et alors A remporte le jeu) ou 3 à 3 (les échanges doivent continuer) ou 2 à 4 (et B remporte le jeu). Les scores du type 6 à 0 ou 5 à 1 sont impossibles car alors un des deux joueurs serait arrivé le premier à 4 points avec plus de deux points d'avance et le jeu se serait arrêté avant le sixième échange.

Regardons d'abord le cas particulier de $E_{5,3}$. Cet évènement se réalise si et seulement si les deux joueurs sont à égalité au bout des 6 premiers échanges *et* A remporte le septième et le huitième. Donc

$$P(E_{5,3}) = E_{3,3} \cap A_7 \cap A_8.$$

Ceci est un cas particulier de la formule (2) en convenant qu'une intersection indexée par « $4 \leq j \leq 3$ » est égale à Ω (ce qui est logique puisque qu'aucun j ne vérifie cette condition, on ne met donc aucune restriction d'appartenance à un C_j pour qu'un évènement élémentaire ω soit dans cette « intersection »).

Pour $k \geq 4$, la réalisation de $E_{k+2,k}$ signifie la victoire de A au bout de $2k+2$ échanges avec cette fois $2k+2 \geq 10$. Ceci se produit si et seulement si *chacune* des trois conditions suivantes se réalise (on aura donc l'intersection des trois évènements correspondants) :

- A et B sont à égalité au bout des 6 premiers échanges
- A et B se retrouvent à égalité à l'issue de chaque paire d'échanges depuis la paire $7^{\text{ième}}$, $8^{\text{ième}}$ jusqu'à la paire $(2k-1)^{\text{ième}}$, $(2k)^{\text{ième}}$.
- A gagne les deux derniers échanges : le $(2k+1)^{\text{ième}}$ et le $(2k+2)^{\text{ième}}$.

L'évènement « A et B marquent chacun un point lors de la paire d'échanges $(2j-1)^{\text{ième}}$ et $(2j)^{\text{ième}}$ » s'écrit $C_j = (A_{2j-1} \cap B_{2j}) \cup (B_{2j-1} \cap A_{2j})$ puisque ou bien A marque le premier et B égalise, ou c'est l'inverse. La justification de (2) est donc complète.

[1] En toute rigueur, ce n'est pas vrai, mais du point de vue du calcul tout se passe comme s'ils l'étaient, voir la remarque 3 page 6.

4) *Calcul des $P(E_{k+2,k})$.*

L'évènement $E_{3,3}$ se réalise si et seulement si lors des 6 premiers échanges, A marque exactement 3 points (donc B aussi). En considérant ces 6 premiers échanges comme une suite d'épreuves répétées indépendantes, on a immédiatement

$$P(E_{3,3}) = C_6^3 p^3(1-p)^3 = 20p^3(1-p)^3.$$

Les évènements $A_{2j-1} \cap B_{2j}$ et $B_{2j-1} \cap A_{2j}$ sont incompatibles (par exemple parce que le premier implique que A remporte l'échange n° $(2j-1)$ tandis que le deuxième implique que B remporte ce même échange). On a donc

$$P(C_j) = P(A_{2j-1} \cap B_{2j}) + P(B_{2j-1} \cap A_{2j}) = p(1-p) + (1-p)p = 2p(1-p),$$

en utilisant l'indépendance des échanges pour la deuxième égalité. On remarque que la valeur trouvée ne dépend pas de j. On la notera r dans la suite pour alléger les écritures. Finalement, par indépendance des échanges on obtient :

$$\begin{aligned} P(E_{k+2,k}) &= P(E_{3,3}) \times \Big(\prod_{j=4}^{k} P(C_j)\Big) \times P(A_{2k+1})P(A_{2k+2}) \\ &= 20p^3(1-p)^3 r^{k-3} p^2 \\ &= 20p^5(1-p)^3 r^{k-3}. \end{aligned}$$

Remarquons que cette formule reste valable dans le cas particulier $k = 3$ où l'on a directement

$$P(E_{5,3}) = P(E_{3,3} \cap A_7 \cap A_8) = P(E_{3,3})P(A_7)P(A_8) = 20p^3(1-p)^3p^2.$$

5) Les $E_{k+2,k}$ sont deux à deux disjoints. En effet, soient $k \neq l$, la réalisation de $E_{k+2,k}$ implique que le jeu se termine au $(2k+2)^{\text{ième}}$ échange tandis que celle de $E_{l+2,l}$ implique qu'il se termine au $(2l+2)^{\text{ième}}$ échange. Comme $k \neq l$, on a aussi $2k+2 \neq 2l+2$, donc les évènements $E_{k+2,k}$ et $E_{l+2,l}$ sont incompatibles. On peut ainsi utiliser la σ-additivité :

$$\begin{aligned} P\Big(\bigcup_{k\geq 3} E_{k+2,k}\Big) &= \sum_{k=3}^{+\infty} P(E_{k+2,k}) \\ &= 20p^5(1-p)^3 \sum_{k=3}^{+\infty} r^{k-3} \\ &= 20p^5(1-p)^3 \sum_{j=0}^{+\infty} r^j \\ &= 20p^5(1-p)^3 \frac{1}{1-r}. \end{aligned}$$

La série géométrique de raison r qui intervient dans ce calcul est bien convergente puisque $r = 2p(1-p)$ est dans $[0,1[$. En effet si $p < 1/2$ alors $2p < 1$ et $2p(1-p) < 1-p \leq 1$, si $p > 1/2$ alors $1 - p < 1/2$ et on a la même majoration stricte pour r en échangeant les rôles de p et $1 - p$, enfin si $p = 1/2$, $r = 2 \times 1/2 \times 1/2 = 1/2 < 1$. En fait on peut vérifier que le maximum de $2p(1-p)$ lorsque p parcourt $[0, 1]$ est atteint en $p = 1/2$.

6) Les évènements figurant dans la décomposition (1) correspondent chacun au gain du jeu sur un score différent et sont donc deux à deux incompatibles. On en déduit

$$\begin{aligned} P(G) &= P(E_{4,0}) + P(E_{4,1}) + P(E_{4,2}) + P\Big(\bigcup_{k\geq 3} E_{k+2,k}\Big) \\ &= p^4\Big(1 + 4(1-p) + 10(1-p)^2 + \frac{20p(1-p)^3}{1-2p(1-p)}\Big) =: f(p). \qquad (3) \end{aligned}$$

On remarque que pour $p = 0$, $P(G) = 0$ et pour $p = 1$, $P(G) = 1$, ce qui est conforme à l'intuition.

7) L'événement $N = \{\text{le jeu continue indéfiniment sans vainqueur}\}$ s'écrit :

$$N = E_{3,3} \cap \Big(\bigcap_{j\geq 4} C_j\Big).$$

Il est donc inclus pour tout $n \geq 4$ dans l'évènement

$$N_n := E_{3,3} \cap \Big(\bigcap_{j=4}^{n} C_j\Big),$$

d'où

$$0 \leq P(N) \leq P(N_n) = 20p^3(1-p)^3 r^{n-3}.$$

Ceci étant vrai pour *tout* $n \geq 4$, ces inégalités *larges* se conservent par passage à la limite quand n tend vers l'infini. Comme $0 \leq r < 1$, la limite de $P(N_n)$ est nulle, on en déduit $P(N) = 0$. La probabilité que le jeu continue indéfiniment est nulle (bien que l'évènement N ne soit pas l'ensemble vide).

8) Notons H l'évènement « B gagne le jeu ». Les trois évènements G, H et N forment une partition de Ω, donc $P(G) + P(H) + P(N) = 1$. Comme nous venons de voir que $P(N) = 0$, cette égalité se réduit à $P(G) + P(H) = 1$. Dans le cas particulier où $p = 1/2$, A ne tire aucun avantage de son service, et on doit avoir par symétrie $P(G) = P(H)$, d'où $P(G) = 1/2$. Vérifions le sur la formule générale (3) pour $P(G)$. Elle s'écrit ici

$$P(G) = \frac{1}{16}\Big(1 + 2 + \frac{10}{4} + \frac{20/16}{1-1/2}\Big) = \frac{1}{16}\Big(3 + \frac{5}{2} + \frac{5}{2}\Big) = \frac{1}{2}.$$

Remarque 1. On aurait pu dans le cas général calculer $\mathbf{P}(H)$ par la même méthode qui nous a conduit à (3) pour $\mathbf{P}(G)$. Il suffit de remarquer que la probabilité que B gagne l'échange est $q = 1 - p$. Il est clair alors que $P(H) = f(q)$. Comme $P(N) = 0$, on doit avoir $f(q) + f(q) = 1$. Graphiquement ceci se traduit par le fait que la représentation graphique de f admet le point $(1/2, 1/2)$ comme centre de symétrie. La figure 1 (réalisée à l'aide du logiciel Scilab) semble le confirmer. Il faut bien avouer que cette symétrie ne

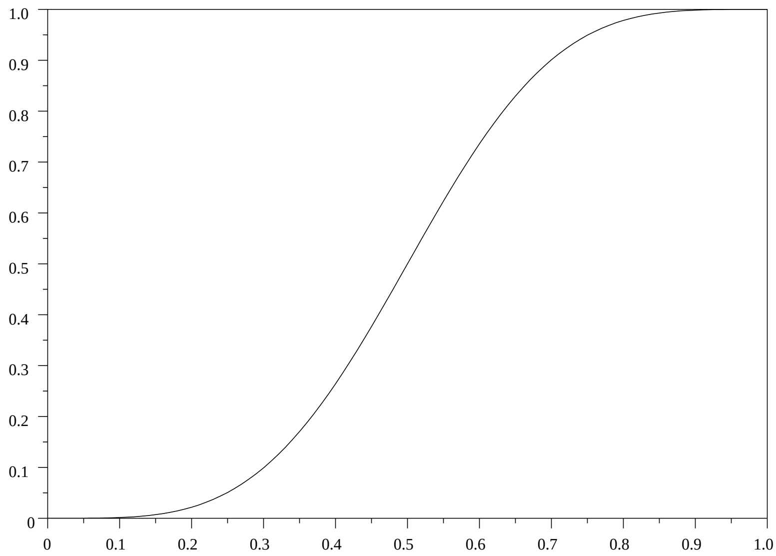

FIG. 1 – Représentation graphique de $P(G) = f(p)$

saute pas aux yeux à la lecture de (3). Pour le vérifier par le calcul, commençons par réécrire (3) sous la forme :

$$f(p) = p^4\Big(1 + 4q + 10q^2 + \frac{20pq^3}{1-2pq}\Big).$$

On a alors

$$f(p) + f(q) = p^4 + q^4 + 4pq(p^3 + q^3) + 10p^2q^2(p^2 + q^2) + \frac{20p^3q^3(p^2+q^2)}{1-2pq}.$$

De là on arrive facilement à $f(p) + f(q) = 1$ grâce aux formules suivantes obtenues en développant $(p + q)^n$ par la formule du binôme en notant que $p + q = 1$:

$$p^2 + q^2 = 1 - 2pq, \quad p^3 + q^3 = 1 - 3pq, \quad p^4 + q^4 = 1 - 4pq + 2p^2q^2.$$

Remarque 2. Un coup d'oeil sur la figure 1 et sur le tableau de valeurs numériques ci-dessous permet de voir l'effet amplificateur des déséquilibres dû aux règles du tennis. Dès que p s'éloigne de 1/2, $f(p)$ se rapproche très vite de 0 ou de 1.

p	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$f(p)$	0,001	0,022	0,099	0,264	0,500	0,736	0,901	0,978	0,999

Remarque 3. L'hypothèse d'indépendance des échanges n'est en réalité valable que pour les 4 premiers échanges (puisqu'on est sûr qu'ils auront lieu). Pour les autres échanges, en raison de l'arrêt au bout d'un nombre aléatoire d'échanges, on ne peut pas avoir indépendance. Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que les évènements $E_{4,0}$ et A_5 ont des probabilités qui ne valent ni 0 ni 1 et sont *incompatibles* : la réalisation de $E_{4,0}$ impliquant le gain du jeu au bout de 4 échanges, A ne peut gagner le cinquième ! Ils ne sont donc pas indépendants. Pourtant la réalisation de $E_{4,0}$ ne dépend que du résultat des 4 premiers échanges et celle de A_5 que du résultat du cinquième échange. Si ces échanges étaient indépendants, ces deux évènements devraient l'être.

Il y a deux façons de remédier à ce problème. La première est de dire que toutes les probabilités calculées dans ce problème sont les mêmes que si les échanges continuaient indéfiniment après le gain du jeu par l'un des deux joueurs. On aurait ainsi une suite infinie d'épreuves répétées indépendantes. L'autre façon est de faire du conditionnement en chaîne en considérant que ce n'est pas $P(A_n)$ qui est constante égale à p comme le fait abusivement l'énoncé[2] mais les probabilités *conditionnelles* $P(A_n \mid H_{n-1})$ où H_{n-1} représente n'importe quelle suite de résultats détaillés des $n-1$ premiers échanges compatible avec la tenue du $n^{\text{ième}}$ échange. Par exemple pour $n = 5$, on peut mettre à la place de H_4 les évènements $A_1 \cap A_2 \cap B_3 \cap A_4$ ou $B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap A_4$.

[2] En fait on doit même clairement avoir $P(A_5) < P(A_4)$ à cause de la possibilité de gain du jeu dès le quatrième échange...

Ex 2. *Le lemme de Fatou pour les séries*

Rappelons d'abord comment on définit la limite inférieure d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n := \inf\{a_k;\ k \geq n\} = \inf_{k\geq n} a_k.$$

Notons que u_n est un élément de $\overline{\mathbb{R}}$, même si tous les a_k sont finis[3]. En raison de l'inclusion $\{a_k;\ k \geq n+1\} \subset \{a_k;\ k \geq n\}$, on a $u_{n+1} \geq u_n$. Ceci étant vrai pour tout entier n, la suite (u_n) est croissante. Elle converge donc dans $\overline{\mathbb{R}}$ vers une limite u_∞ qui, en raison de la croissance de (u_n), est aussi le supremum de l'ensemble $\{u_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. C'est cette limite u_∞ que l'on appelle *limite inférieure* de la suite (a_n). Ainsi

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n := u_\infty = \lim_{n\to+\infty} u_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} a_k.$$

1) L'énoncé demandait de montrer que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de réels,

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n + \liminf_{n\to+\infty} b_n \leq \liminf_{n\to+\infty}(a_n + b_n) \tag{4}$$

et que cette inégalité reste vérifiée lorsque $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Un oubli malencontreux rend cette affirmation fausse. Il fallait lire « $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de réels positifs *». Le contre exemple élémentaire suivant montre que (4) ne peut être vraie pour toutes suites (a_n) et (b_n) de réels. Prenons pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k := -k$ et $b_k := k$. Alors $\liminf_{n\to+\infty} a_n = -\infty$, $\liminf_{n\to+\infty} b_n = +\infty$ et $\liminf_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = 0$. Dans ce cas le membre de gauche de (4) s'écrit « $-\infty + \infty$ », ce qui n'a pas de sens. Pour clarifier la question, nous allons montrer que (4) est vraie pour des suites de réels (pas forcément positifs) (a_n) et (b_n) avec l'hypothèse supplémentaire que les limites inférieures de (a_n) et (b_n) ne sont pas simultanément infinies de signes contraires[4]. Ceci englobe évidemment le cas où (a_n) et (b_n) sont des suites dans $\mathbb{R}_+$ puisqu'alors les limites inférieures sont dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.*

Remarquons d'abord que $a_n + b_n$ est bien défini pour tout n (somme de deux réels). Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n := \inf_{k\geq n} a_k, \quad v_n := \inf_{k\geq n} b_k, \quad w_n := \inf_{k\geq n}(a_k + b_k).$$

Les trois suites ainsi définies sont croissantes, donc convergentes dans $\overline{\mathbb{R}}$ vers une limite notée respectivement u_∞, v_∞ et w_∞.

Pour $k \geq n$, on a $u_n \leq a_k$ et $v_n \leq b_k$. Comme a_k et b_k sont réels, ni u_n ni v_n ne peut valoir $+\infty$. S'ils sont tous les deux finis, on a $u_n + v_n \leq a_k + b_k$ (par compatibilité de la relation d'ordre avec l'addition dans $\mathbb{R}$). Si u_n ou v_n vaut $-\infty$, alors $u_n + v_n = -\infty$, d'où $u_n + v_n < a_k + b_k$ puisque $a_k + b_k$ est réel. Ainsi l'inégalité $u_n + v_n \leq a_k + b_k$ est vérifiée

[3] On le voit bien sur l'exemple $a_k := -k$.

[4] Si vous avez fait l'exercice 3 de la fiche 1 qui proposait de montrer l'inégalité inverse pour les limites supérieures, le bogue de l'énoncé n'a pas du vous échapper.

pour tout $k \geq n$, ce qui implique $u_n + v_n \leq \inf\{(a_k + b_k);\ k \geq n\}$. Le raisonnement fait étant valable pour tout entier n, nous venons d'établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n + v_n \leq w_n. \tag{5}$$

Comme nous avons supposé que u_∞ et v_∞ ne sont pas simultanément infinis de signes contraires, la suite $(u_n + v_n)$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}$ vers $u_\infty + v_\infty$. Le passage à la limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ conservant les inégalités *larges*, on déduit alors de (5) que

$$u_\infty + v_\infty \leq w_\infty,$$

ce qui n'est qu'une écriture abrégée de (4).

Pour vérifier (4) dans le cas où (a_n) et (b_n) sont des suites dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, on remarque d'abord que la somme de deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}_+$ est toujours définie et que u_n, v_n et w_n sont des éléments de $\overline{\mathbb{R}}_+$. On a encore les inégalités $u_n \leq a_k$ et $v_n \leq b_k$ pour tout $k \geq n$. Cette fois u_n et v_n peuvent prendre la valeur $+\infty$, mais cela ne pose pas de problème pour en déduire que $u_n + v_n \leq a_k + b_k$ (puisque $u_n + v_n$ est bien défini comme élément de $\overline{\mathbb{R}}_+$ et par compatibilité de l'ordre avec l'addition dans $\overline{\mathbb{R}}_+$). Comme ci-dessus on en déduit (5) et on peut passer à la limite quand n tend vers $+\infty$: la suite croissante [5] $(u_n + v_n)$ converge toujours dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ vers $u_\infty + v_\infty$, d'où le résultat.

2) L'inégalité (4) s'étend à la somme d'un nombre fini de suites dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ (récurrence immédiate basée sur l'associativité de l'addition). Ainsi pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^{j} \liminf_{n\to+\infty} u_{n,i} \leq \liminf_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{j} u_{n,i}. \tag{6}$$

D'autre part les $u_{n,i}$ étant positifs, on a pour tout $j \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}$ l'inégalité suivante dans $\overline{\mathbb{R}}_+$:

$$\sum_{i=0}^{j} u_{n,i} \leq \sum_{i=0}^{+\infty} u_{n,i}.$$

Grâce à la conservation des inégalités larges par passage à la limite inférieure[6], ceci implique :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad \liminf_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{j} u_{n,i} \leq \liminf_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} u_{n,i}. \tag{7}$$

De (6) et (7) on déduit :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad \sum_{i=0}^{j} \liminf_{n\to+\infty} u_{n,i} \leq \liminf_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} u_{n,i}.$$

[5] Dans le cas précédent, la suite $(u_n + v_n)$ est aussi une suite croissante de $\overline{\mathbb{R}}$. Elle ne converge vers $u_\infty + v_\infty$ que si cette quantité est bien définie. Regardons à nouveau l'exemple $a_k = -k$ et $b_k = k$. Ici $u_n = -\infty$, $v_n = n$, $u_n + v_n$ est bien défini et vaut $-\infty$ pour tout n, de sorte que la suite croissante $(u_n + v_n)$ est la suite constante égale à $-\infty$, donc convergente vers $u_\infty = -\infty$ et non pas vers $u_\infty + v_\infty$ qui n'est pas défini.

[6] Propriété vue en T.D., fiche 1 exercice 3.

Dans cette inégalité, le deuxième membre est une constante (élément de $\overline{\mathbb{R}}_+$), tandis que le premier membre est le terme de rang j d'une suite croissante dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, convergente vers $\sum_{i=0}^{+\infty} \liminf_{n\to+\infty} u_{n,i}$. L'inégalité étant valable pour tout entier j, on peut passer à la limite quand j tend vers $+\infty$ en conservant l'inégalité large et on obtient ainsi :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \liminf_{n\to+\infty} u_{n,i} \leq \liminf_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} u_{n,i}, \tag{8}$$

ce qui constitue le lemme de Fatou pour les séries à termes dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

3) Voici deux exemples où l'inégalité (8) est stricte. Pour alléger nous noterons G le membre de gauche de (8) et D son membre de droite.
Exemple 1. On prend $u_{n,i} = 1$ si $i = n$ et $u_{n,i} = 0$ si $i \neq n$. Dans ce cas on a immédiatement $\liminf_{n\to+\infty} u_{n,i} = 0$ pour tout i, donc $G = 0$. Pour n fixé, la série $\sum_{i=0}^{+\infty} u_{n,i}$ a un seul terme non nul et sa somme vaut 1 et ne dépend donc pas de n, d'où $D = 1$.
Exemple 2. On prend $u_{n,i} = 1$ si i et n ont même parité et $u_{n,i} = 0$ sinon. On a encore $\liminf_{n\to+\infty} u_{n,i} = 0$ pour tout i, donc $G = 0$. Pour n fixé, la série $\sum_{i=0}^{+\infty} u_{n,i}$ a une infinité de termes valant 1 et a donc pour somme $+\infty$ qui est aussi une constante indépendante de n, d'où $D = +\infty$.

Remarque 4. Le lemme de Fatou qui sera vu ultérieurement en cours s'énonce comme suit. Si $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ est un espace mesuré et (f_n) une suite de fonctions mesurables $\Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$,

$$\int_\Omega \liminf_{n\to+\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

L'inégalité (8) n'est qu'un cas particulier de ce lemme général. En effet prenons $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ et définissons $f_n : \mathbb{N} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, $k \mapsto f_n(k) := u_{n,k}$. Prenons pour μ la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$, définie par $\mu = \sum_{k\in\mathbb{N}} \delta_k$. Alors

$$\int_\mathbb{N} f_n \,\mathrm{d}\mu = \sum_{k\in\mathbb{N}} u_{n,k} \quad \text{et} \quad \int_\mathbb{N} \liminf_{n\to+\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu = \sum_{k\in\mathbb{N}} \liminf_{n\to+\infty} u_{n,k}.$$