Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IFP **Année 2003-04**

Corrigé de l'examen de deuxième session, septembre 2004

Ex 1. *Calcul de la série* $S := \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} \big(1-\sqrt{\sin x}\,\big)^k \cos x \, \mathrm{d}x.$

On remarque d'abord que le terme général I_k de cette série est l'intégrale de Riemann d'une fonction *continue* sur *l'intervalle fermé borné* $[0, \pi/2]$, on peut donc la convertir en intégrale de Lebesgue :

$$I_k = \int_0^{\pi/2} \big(1-\sqrt{\sin x}\,\big)^k \cos x \, \mathrm{d}x = \int_{[0,\pi/2]} \big(1-\sqrt{\sin x}\,\big)^k \cos x \, \mathrm{d}\lambda(x).$$

Pour $x \in [0, \pi/2]$, $\sin x$ et $\cos x$ sont dans $[0, 1]$ et ceci entraîne la positivité de l'intégrande dans I_k. Par le théorème d'interversion série intégrale pour les fonctions mesurables positives, on en déduit

$$S = \int_{[0,\pi/2]} \left\{ \sum_{k=0}^{+\infty} \big(1-\sqrt{\sin x}\,\big)^k \cos x \right\} \mathrm{d}\lambda(x),$$

égalité vraie *a priori* dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Pour $x \in]0, \pi/2]$, la série entre accolades est une série géométrique de raison $q(x) = (1-\sqrt{\sin x}) \in [0, 1[$ et de premier terme $\cos x$. Elle est donc convergente et

$$\forall x \in]0, \pi/2], \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \big(1-\sqrt{\sin x}\,\big)^k \cos x = \frac{\cos x}{1-q(x)} = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}.$$

Comme le singleton $\{0\}$ est λ-négligeable, on a $\int_{[0,\pi/2]} \{\dots\} \,\mathrm{d}\lambda = \int_{]0,\pi/2]} \{\dots\} \,\mathrm{d}\lambda$, d'où

$$S = \int_{]0,\pi/2]} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} \, \mathrm{d}\lambda(x).$$

La fonction $f : x \mapsto \cos x (\sin x)^{-1/2}$ est continue et positive sur $]0, \pi/2]$ et tend vers $+\infty$ à droite en 0, en étant équivalente à $x^{-1/2}$. L'intégrale de Riemann généralisée $\int_0^{\pi/2} f(x) \, \mathrm{d}x$ est donc absolument convergente et

$$S = \int_{]0,\pi/2]} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} \, \mathrm{d}\lambda(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} \, \mathrm{d}x.$$

La fonction f étant de la forme $u^{-1/2}u'$ admet pour primitive $2u^{1/2}$, d'où finalement :

$$S = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} \, \mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \Big[2\sqrt{\sin x} \Big]_\varepsilon^{\pi/2} = 2.$$

Ex 2. *Étude de* $t \mapsto \mathbf{E}\arctan(tX)$

On note X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ et on pose

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Psi_X(t) := \mathbf{E}\arctan(tX), \tag{1}$$

où arctan désigne la réciproque de la restriction de la fonction tangente à $]-\pi/2, \pi/2[$.

1) La variable aléatoire réelle X est par définition une application mesurable $\mathcal{F}$-Bor($\mathbb{R}$). Pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'application $a_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \arctan(tx)$ est continue donc borélienne. L'application composée $a_t \circ X : \Omega \to \mathbb{R}$, $\omega \mapsto \arctan(tX(\omega))$ est donc mesurable $\mathcal{F}$-Bor($\mathbb{R}$). C'est donc une *variable aléatoire*, bornée puisque prenant ses valeurs dans $]-\pi/2, \pi/2[$. Par conséquent son espérance existe et ceci étant vrai pour t réel quelconque, la fonction Ψ_X est définie sur $\mathbb{R}$ et bornée. Remarquons au passage que par linéarité de l'espérance et imparité de la fonction arctan, Ψ_X est toujours impaire.

2) Par le transfert $\Omega \xrightarrow{X} \mathbb{R}$, on a en notant P_X la loi de X (mesure image $\mathbf{P} \circ X^{-1}$) :

$$\mathbf{E}\arctan(tX) = \int_\Omega \arctan(tX(\omega))\,\mathrm{d}\mathbf{P}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \arctan(tx)\,\mathrm{d}P_X(x).$$

Dans l'intégrale $I = \int_{\mathbb{R}} \arctan(tx)\,\mathrm{d}P_X(x)$, le symbole x est une variable muette que l'on peut remplacer par n'importe quelle lettre (par exemple y) et on peut tout aussi bien écrire $I = \int_{\mathbb{R}} \arctan(t\,.)\,\mathrm{d}P_X$. Si X et Y ont même loi, $P_X = P_Y$ et

$$\Psi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} \arctan(t\,.)\,\mathrm{d}P_X = \int_{\mathbb{R}} \arctan(t\,.)\,\mathrm{d}P_Y = \Psi_Y(t).$$

Cette égalité étant vérifiée pour tout t réel, on a bien $\Psi_X = \Psi_Y$.

Ainsi la fonctionnelle Ψ_X ne dépend de la variable aléatoire X que par sa loi P_X. Calculons la dans les deux cas particuliers suivants :

a) $P_X = \mathrm{Bern}(p)$. Alors $P_X = (1-p)\delta_0 + p\delta_1$, d'où

$$\Psi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} \arctan(t\,.)\,\mathrm{d}\big((1-p)\delta_0 + p\delta_1\big) = (1-p)\arctan(0) + p\arctan(t) = p\arctan(t).$$

b) $P_X = \mathrm{Unif}([0,1])$. Alors P_X est la restriction [1] de la mesure de Lebesgue à $[0,1]$, d'où

$$\Psi_X(t) = \int_{[0,1]} \arctan(tx)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_0^1 \arctan(tx)\,\mathrm{d}x,$$

la conversion de l'intégrale de Lebesgue en intégrale de Riemann se justifiant ici par la continuité de l'intégrande sur l'intervalle fermé borné $[0,1]$. Cette intégrale de Riemann est nulle pour $t = 0$. Pour $t \neq 0$, on la calcule en enchaînant le changement de variable $u = tx$ et une intégration par parties.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \arctan(tx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{t}\int_0^t \arctan u\,\mathrm{d}u &= \frac{1}{t}\left[u\arctan u\right]_0^t - \frac{1}{t}\int_0^t \frac{u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u \\ &= \arctan t - \frac{1}{2t}\left[\ln(1+u^2)\right]_0^t. \end{aligned}$$

1. Plus précisément la mesure de densité $\mathbf{1}_{[0,1]}$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Finalement $\Psi_X(0) = 0$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \quad \Psi_X(t) = \arctan t - \frac{\ln(1+t^2)}{2t}.$$

Remarquons au passage que Ψ_X est continue en 0, puisque $\lim_{x\to 0} \Psi_X(t) = 0$.

3) Lorsque la loi de X est *symétrique*, *i.e.* X et $-X$ ont même loi, on a clairement (cf. question 2) :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Psi_X(t) = \Psi_{-X}(t) = \mathbf{E} \arctan(-tX) = -\Psi_X(t),$$

d'où $\Psi_X(t) = 0$. Ainsi Ψ_X est la fonction nulle chaque fois que X a une loi symétrique. Il en résulte que la fonctionnelle Ψ ne caractérise pas la loi puisque si X et Y ont des lois symétriques différentes, par exemple $P_X = \text{Unif}[-1,1]$ et $P_Y = \mathfrak{N}(0,1)$, $\Psi_X = \Psi_Y = 0$.

4) La continuité de Ψ_X sur $\mathbb{R}$ est une application immédiate du théorème de continuité sous le signe somme en notant que

a) pour tout $\omega \in \Omega$, l'application $t \mapsto \arctan(tX(\omega))$ est continue sur $\mathbb{R}$;

b) l'application $\omega \mapsto \arctan(tX(\omega))$ est dominée sur Ω par la fonction constante (donc $\mathbf{P}$-intégrable) $\pi/2$, et ce *uniformément par rapport à* $t \in \mathbb{R}$.

Il est clair que cette justification n'utilise aucune hypothèse sur la loi de X.

5) Pour montrer que

$$\lim_{t\to+\infty} \Psi_X(t) = -\frac{\pi}{2}\mathbf{P}(X<0) + \frac{\pi}{2}\mathbf{P}(X>0), \tag{2}$$

notons $(t_n)_{n\geq 1}$ une suite tendant vers $+\infty$. L'étude de la convergence de $\big(\arctan(t_nX)\big)_{n\geq 1}$ nous amène naturellement à distinguer les trois cas suivants correspondant à la partition de Ω en les évènements $\{X<0\}$, $\{X=0\}$ et $\{X>0\}$. On voit immédiatement que

$$\arctan(t_nX(\omega)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{si } X(\omega) < 0, \\ 0 & \text{si } X(\omega) = 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } X(\omega) > 0. \end{cases}$$

Autrement dit la suite de fonctions mesurables $\big(\arctan(t_nX)\big)_{n\geq 1}$ converge sur tout Ω vers $-\frac{\pi}{2}\mathbf{1}_{\{X<0\}} + \frac{\pi}{2}\mathbf{1}_{\{X>0\}}$. Cette convergence est *dominée* par la fonction constante (donc $\mathbf{P}$-intégrable) $\omega \mapsto \frac{\pi}{2}$. Le théorème de convergence dominée nous donne alors

$$\lim_{n\to+\infty} \Psi_X(t_n) = \mathbf{E}\Big(-\frac{\pi}{2}\mathbf{1}_{\{X<0\}} + \frac{\pi}{2}\mathbf{1}_{\{X>0\}}\Big) = -\frac{\pi}{2}\mathbf{P}(X<0) + \frac{\pi}{2}\mathbf{P}(X>0).$$

Le choix de la suite $(t_n)_{n\geq 1}$ tendant vers $+\infty$ étant arbitraire, on en déduit (2).

Pour trouver la limite de Ψ_X en $-\infty$, on peut soit reprendre l'argumentation précédente en changeant seulement le signe de la limite dans les cas 1 et 3, soit utiliser l'imparité de Ψ_X. On obtient ainsi :

$$\lim_{t\to-\infty} \Psi_X(t) = \frac{\pi}{2}\mathbf{P}(X<0) - \frac{\pi}{2}\mathbf{P}(X>0). \tag{3}$$

6) *Étude de la dérivabilité de* Ψ_X

Montrer que Ψ_X est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ quelle que soit la loi de X et qu'elle est dérivable en 0 si $\mathbf{E}|X|$ est finie. Que peut-on dire de la continuité de la dérivée de Ψ_X ?

Posons
$$f : \mathbb{R} \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (t, \omega) \longmapsto \arctan\bigl(tX(\omega)\bigr).$$
L'étude de la dérivabilité de Ψ_X *via* le théorème de dérivation sous le signe somme repose sur les constatations suivantes.

1. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t, \,.\,)$ est $\mathbf{P}$-intégrable sur Ω comme fonction bornée.
2. Pour tout $\omega \in \Omega$, $f(\,.\,, \omega)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\frac{\partial}{\partial t} f(t, \omega) = \frac{X(\omega)}{1 + t^2 X(\omega)^2}.$$

Pour appliquer le théorème de dérivation sous le signe somme, nous cherchons une majoration uniforme en t de $\bigl|\frac{\partial f}{\partial t}\bigr|$ par une fonction $g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$ intégrable sur Ω. Si X est elle-même intégrable, il suffit d'utiliser la majoration évidente :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ \forall \omega \in \Omega, \quad \left|\frac{X(\omega)}{1 + t^2 X(\omega)^2}\right| = \frac{|X(\omega)|}{1 + t^2 X(\omega)^2} \leq |X(\omega)|. \tag{4}$$
Le théorème de dérivation sous le signe somme (appliqué en version « globale ») nous dit alors que si X est intégrable, Ψ_X est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (\Psi_X)'(t) = \mathbf{E}\left(\frac{X}{1 + t^2 X^2}\right). \tag{5}$$

Que se passe-t-il si X n'est plus intégrable ? On remarque que dans (4), le majorant $|X(\omega)|$ est atteint pour $t = 0$. On ne peut donc pas trouver de majorant plus petit uniforme en t sur un voisinage de 0. Par conséquent la dérivabilité en 0 ne peut s'obtenir par le théorème de dérivabilité sous le signe somme.

Essayons néanmoins de prouver la dérivabilité sur $\mathbb{R}^*$ en fixant un $t_0 \neq 0$ et en cherchant un voisinage V_0 de t_0 sur lequel $\bigl|\frac{\partial f}{\partial t}\bigr|$ soit majoré uniformément en t par une fonction intégrable sur Ω. Puisque Ψ_X est impaire, on ne perd pas de généralité en supposant $t_0 > 0$. On utilise alors les majorations suivantes.

$$\text{Si } |X(\omega)| \leq 1, \qquad \frac{|X(\omega)|}{1 + t^2 X(\omega)^2} \leq |X(\omega)| \leq 1.$$
$$\text{Si } |X(\omega)| > 1, \qquad \frac{|X(\omega)|}{1 + t^2 X(\omega)^2} \leq \frac{|X(\omega)|}{t^2 X(\omega)^2} = \frac{1}{t^2 |X(\omega)|} \leq \frac{1}{t^2}.$$

On peut résumer ces deux cas en notant que
$$\forall t \in \mathbb{R}^*,\ \forall \omega \in \Omega, \quad \left|\frac{\partial}{\partial t} f(t, \omega)\right| \leq \max\left(1, \frac{1}{t^2}\right).$$
Finalement, en prenant comme voisinage de t_0, $V_0 :=]t_0/2, +\infty[$, on a majoration uniforme sur V_0 de $\bigl|\frac{\partial f}{\partial t}\bigr|$ par la fonction constante (donc $\mathbf{P}$-intégrable) $\omega \mapsto \max(1, 4t_0^{-2})$. Le théorème de dérivation sous le signe somme (version « locale ») nous donne alors la

dérivabilité de Ψ_X sur V_0, la dérivée se calculant par (5). Comme $t_0 \neq 0$ était arbitraire, cette formule reste vraie pour tout $t \in \mathbb{R}^*$.

Le fait que pour X non intégrable, le théorème de dérivation sous le signe somme ne s'applique pas sur un voisinage de 0 n'interdit pas *a priori* à Ψ_X d'être dérivable en 0. D'ailleurs il est facile d'exhiber des exemples de cette situation en prenant pour X n'importe quelle variable aléatoire non intégrable et de loi symétrique (puisqu'alors Ψ_X est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$, donc trivialement C^∞ sur $\mathbb{R}$). À partir de cette famille de variables aléatoires symétriques non intégrables, on peut construire une famille encore plus grande de variables aléatoires Z non intégrables telles que Ψ_Z soit dérivable en 0. Il suffit de prendre X symétrique non intégrable, Y intégrable et Z telle que $P_Z = pP_X + (1-p)P_Y$ pour un $p \in]0,1[$ (exercice : vérifiez cette affirmation et proposez une méthode pour construire explicitement une telle Z à partir de X et Y).

Nous allons maintenant prouver que si X est *positive non intégrable*, Ψ_X est non dérivable en 0. Ceci établira l'optimalité de la dérivabilité de Ψ_X sur $\mathbb{R}^*$ dans le cas où l'on ne fait aucune hypothèse sur la loi de X. Dans ce but, on montre (en notant que $\Psi_X(0) = 0$) que pour une suite quelconque (t_n) dans $\mathbb{R}^*$ et tendant vers 0,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\Psi_X(t_n)}{t_n} = +\infty. \tag{6}$$

Pour une telle suite (t_n) on a

$$\forall \omega \in \Omega, \qquad \frac{\arctan\big(t_n X(\omega)\big)}{t_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} X(\omega).$$

Les fonctions $\arctan(t_n X)$ étant mesurables positives, cette convergence combinée avec le lemme de Fatou nous donne alors [2] :

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega \frac{\arctan\big(t_n X(\omega)\big)}{t_n} \,\mathrm{d}P(\omega) \geq \int_\Omega X(\omega)\,\mathrm{d}P(\omega) = +\infty.$$

Ceci prouve (6), puisque si la limite inférieure d'une suite dans $\overline{\mathbb{R}}$ vaut $+\infty$, la suite a pour limite $+\infty$.

Ex 3. *Simulation par rapport d'uniformes (6 points)*

On se propose de justifier la méthode suivante de simulation d'une variable aléatoire Y de densité f connue. On suppose que l'on sait simuler un vecteur aléatoire (U,V) de loi uniforme sur le borélien

$$A := \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2;\ 0 < u < f\left(\frac{v}{u}\right)^{1/2}\right\}. \tag{7}$$

Alors la variable aléatoire $Y := V/U$ suit la loi de densité f.

1) *Calcul de* $\lambda_2(A)$. En notant l'inclusion $A \subset]0,+\infty[\times\mathbb{R}$, on a

$$\lambda_2(A) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_A(u,v)\,\mathrm{d}\lambda_2(u,v) = \int_{]0,+\infty[\times\mathbb{R}} \mathbf{1}_A(u,v)\,\mathrm{d}\lambda_2(u,v). \tag{8}$$

2. Rappelons que si X est mesurable positive, l'écriture $\int_\Omega X(\omega)\,\mathrm{d}P(\omega)$ a toujours un sens comme élément de $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Considérons le changement de variable

$$\varphi :]0,+\infty[\times\mathbb{R} \longrightarrow]0,+\infty[\times\mathbb{R}, \quad (u,v) \longmapsto (x,y) = \varphi(u,v) = \Big(u, \frac{v}{u}\Big).$$

C'est une bijection de l'ouvert $D =]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ sur lui même. En effet pour tout $(u,v) \in D$, u est strictement positif donc $(u, v/u)$ est dans D. Ainsi $\varphi(D)$ est inclus dans D. D'autre part pour tout couple $(x,y) \in D$, il existe un unique couple $(u,v) \in D$ tel que $\varphi(u,v) = (x,y)$, ce couple s'obtient immédiatement en résolvant le système $x = u$ et $y = v/u$, d'inconnues u et v, ce qui donne $u = x$ et $v = xy$.

L'application réciproque φ^{-1} est donnée par

$$\varphi^{-1} :]0,+\infty[\times\mathbb{R} \longrightarrow]0,+\infty[\times\mathbb{R}, \quad (x,y) \longmapsto (u,v) = \varphi^{-1}(x,y) = (x, xy).$$

Les quatre dérivées partielles de φ^{-1} apparaissant dans le calcul de son jacobien ci-dessous sont visiblement continues sur D, donc φ^{-1} est de classe C^1.

$$\operatorname{Jac}(\varphi^{-1})(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ y & x \end{vmatrix} = x.$$

On voit ainsi que $\operatorname{Jac}(\varphi^{-1})(x,y)$ ne s'annule en aucun point de D. Le théorème d'inversion globale nous dit alors que φ est un C^1 difféomorphisme de D sur D.

Le changement de variable φ dans (8) s'écrit :

$$\lambda_2(A) = \int_{]0,+\infty[\times\mathbb{R}} \mathbf{1}_A\big(\varphi^{-1}(x,y)\big) x \,\mathrm{d}\lambda_2(x,y) = \int_{]0,+\infty[\times\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\varphi(A)}(x,y) x \,\mathrm{d}\lambda_2(x,y). \qquad (9)$$

On détermine $B := \varphi(A)$ en notant que pour $(x,y) \in D$,

$$\varphi^{-1}(x,y) \in A \Leftrightarrow (x,xy) \in A \Leftrightarrow 0 < x < f(y)^{1/2} \Leftrightarrow 0 < x^2 < f(y).$$

La dernière équivalence utilise la positivité stricte de x due à l'appartenance de (x,y) à D. Ainsi $B = \{(x,y) \in D;\ 0 < x^2 < f(y)\}$. En reportant ceci dans (9), on obtient en utilisant successivement le théorème de Fubini-Tonelli, le changement de variable $t = x^2$ et le fait que f est une densité de probabilité ($\int_{\mathbb{R}} f \,\mathrm{d}\lambda_1 = 1$) :

$$\begin{aligned} \lambda_2(A) &= \int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_{]0,+\infty[} \mathbf{1}_{]0,f(y)[}(x^2) x \,\mathrm{d}\lambda_1(x) \right\} \mathrm{d}\lambda_1(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_{]0,+\infty[} \mathbf{1}_{]0,f(y)[}(t) \frac{1}{2} \,\mathrm{d}\lambda_1(t) \right\} \mathrm{d}\lambda_1(y) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} f(y) \,\mathrm{d}\lambda_1(y) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Le borélien A étant de mesure de Lebesgue *finie*, il est légitime de parler de la loi uniforme sur A.

2) Pour obtenir la loi du couple $(X,Y) := \Big(U, \dfrac{V}{U}\Big)$, on calcule de deux façons $\mathbf{E}h(X,Y)$ pour $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ borélienne positive arbitraire.

1

1re façon, par transfert $\Omega \xrightarrow{(X,Y)} \mathbb{R}^2$.

$$\mathbf{E}h(X,Y) = \int_\Omega h\big(X(\omega),Y(\omega)\big)\,\mathrm{d}\mathbf{P}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^2} h(x,y)\,\mathrm{d}P_{(X,Y)}(x,y). \tag{10}$$

2e façon, par transfert $\Omega \xrightarrow{(U,V)} \mathbb{R}^2$. En utilisant les mêmes notations qu'à la question précédente, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}h(X,Y) &= \int_\Omega h\Big(U(\omega),\frac{V(\omega)}{U(\omega)}\Big)\,\mathrm{d}\mathbf{P}(\omega) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} h\Big(u,\frac{v}{u}\Big)\,\mathrm{d}P_{(U,V)}(u,v) \qquad (11)\\
&= \int_D h\Big(u,\frac{v}{u}\Big)2\mathbf{1}_A(u,v)\,\mathrm{d}\lambda_2(u,v) \qquad (12)\\
&= \int_D h(x,y)2x\mathbf{1}_B(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_2(x,y) \qquad (13)\\
&= \int_{\mathbb{R}^2} h(x,y)2x\mathbf{1}_B(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_2(x,y). \qquad (14)
\end{aligned}$$

Justifications.

(11) : Transfert $\Omega \xrightarrow{(U,V)} \mathbb{R}^2$.

(12) : $P_{(U,V)}$ est la loi uniforme sur A, de densité $\lambda_2(A)^{-1}\mathbf{1}_A$ et A est inclus dans l'ouvert D.

(13) : On applique le changement de variable φ étudié à la question précédente, $\varphi(D) = D$, $\varphi(A) = B$ et $|\operatorname{Jac}(\varphi^{-1})(x,y)| = x$.

La comparaison de (10) et (14) nous permet de conclure que la loi $P_{(X,Y)}$ est la mesure de densité par rapport à λ_2 :

$$g:\ (x,y) \longmapsto 2x\mathbf{1}_B(x,y), \quad \text{où} \quad B = \{(x,y)\in D;\ 0 < x^2 < f(y)\}.$$

Il en résulte que $Y = V/U$ est à densité par rapport à λ_1 et que cette densité g_Y s'obtient par intégration partielle de g :

$$g_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} g(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_1(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{]0,f(y)[}(x^2)2x\,\mathrm{d}\lambda_1(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{]0,f(y)[}(t)\,\mathrm{d}\lambda_1(t) = f(y).$$

Ainsi la variable aléatoire $Y = V/U$ a bien pour densité f, ce qui achève la justification de la méthode du rapport d'uniformes pour simuler Y.

3) Cette méthode n'est applicable que si l'on sait effectivement simuler un vecteur de loi uniforme sur A. C'est le cas notamment *via* l'algorithme du rejet lorsque A est *borné*. Montrons qu'une condition suffisante pour que A soit borné est que la densité f vérifie

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x) < +\infty \quad \text{et} \quad \sup_{x\in\mathbb{R}} x^2 f(x) < +\infty. \tag{15}$$

Supposons donc qu'il existe deux constantes réelles positives a et b telles que

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad f(t)\le a,\quad t^2 f(t) \le b.$$

Soit (u, v) un point de A. Alors l'inégalité $0 < u < f(v/u)^{1/2}$ implique immédiatement que $0 < u < a^{1/2}$. D'autre part on a $0 < u^2 < f(v/u)$, ce qui en posant $t = v/u$ s'écrit encore $0 < (v/t)^2 < f(t)$, d'où $0 < v^2 < t^2 f(t) \leq b$. On en déduit $-b^{1/2} < v < b^{1/2}$. Comme (u, v) était quelconque dans A, nous avons ainsi établi l'inclusion

$$A \subset [0, a^{1/2}] \times [-b^{1/2}, b^{1/2}].$$

Ainsi les conditions (15) impliquent la bornitude de A.

Ex 4. *Escargot aléatoire (4 points)*

Soit $(X_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, indépendantes et de même loi, de carré intégrable ($\mathbf{E}(X_1^2) < +\infty$). On définit par récurrence la suite de variables aléatoires positives $(R_n)_{n\geq 1}$ par

$$R_1 = |X_1|, \quad R_n = \sqrt{R_{n-1}^2 + X_n^2}, \quad n \geq 2.$$

1) Pour étudier le comportement asymptotique de $(n^{-1/2} R_n)$, on commence par remarquer que :

$$R_n^2 = R_{n-1}^2 + X_n^2 \quad \text{d'où} \quad R_n^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2.$$

Ainsi $\left(n^{-1} R_n^2\right)_{n\geq 1}$ apparaît comme la suite des moyennes arithmétiques des termes de la suite $(X_i^2)_{i\in\mathbf{N}^*}$. Comme ces variables s'écrivent $X_i^2 = h(X_i)$ où h est la fonction mesurable $h : x \mapsto x^2$, la suite $(X_i^2)_{i\in\mathbf{N}^*}$ hérite de l'indépendance des X_i. Comme h ne dépend pas de i et les X_i ont même loi, il en va de même pour les X_i^2. Enfin, $\mathbf{E}(X_i^2)$ est finie par hypothèse. Les X_i^2 vérifient donc les hypothèse de la loi forte des grands nombres (cas i.i.d.), d'où

$$\frac{R_n^2}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} \mathbf{E}(X_1^2). \tag{16}$$

Par continuité de la fonction $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \sqrt{x}$, on en déduit immédiatement que

$$\frac{R_n}{n^{1/2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} \sqrt{\mathbf{E}(X_1^2)} =: \tau. \tag{17}$$

2) Les X_i étant maintenant de même loi uniforme sur $[0, 1]$, on construit dans un repère orthonormé du plan la suite $(M_n)_{n\geq 1}$ de points aléatoires par la récurrence suivante. On pose d'abord $M_1 = (X_1, 0)$, puis connaissant M_{n-1} on obtient M_n comme l'unique point tel que $M_{n-1}M_n = X_n$ et que l'angle $(\overrightarrow{M_{n-1}M_n}, \overrightarrow{M_{n-1}O})$ ait pour mesure $+\pi/2$. On trace ainsi la ligne polygonale $\mathcal{E}_n$ de sommets $M_1, M_2, \ldots, M_n$ (l'escargot aléatoire). On fixe un $\varepsilon > 0$ et on se propose de montrer que presque sûrement, $\mathcal{E}_n$ est inclus dans le disque de centre O et de rayon $(1 + \varepsilon)\sqrt{n/3}$ pour tout n assez grand.

Commençons par calculer τ lorsque X_1 suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.

$$\mathbf{E}X_1^2 = \int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}, \quad \text{d'où} \quad \tau = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Remarquons ensuite que la suite (R_n) étant croissante, $\mathcal{E}_n$ est inclus dans le disque fermé D_n de centre O et de rayon R_n. En effet puisque $OM_i = R_i$, tous les M_i pour $i \leq n$ sont dans D_n. De plus si $i < n$, M_i et M_{i+1} sont tous deux dans D_n qui par *convexité* contient tout le segment d'extrémités M_i et M_{i+1}. Ainsi D_n contient toute la ligne polygonale $\mathcal{E}_n$.

Notons $\Omega' := \{\omega \in \Omega;\ \lim_{n\to+\infty} n^{-1/2}R_n(\omega) = \tau\}$. On a alors

$$\forall \omega \in \Omega',\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 = n_0(\omega,\varepsilon),\ \forall n \geq n_0, \quad n^{-1/2}R_n(\omega) \leq \tau(1+\varepsilon).$$

Pour ε_0 fixé, on a clairement l'inclusion d'évènements

$$\Omega' \subset \big\{\omega \in \Omega,\ \exists n_0 = n_0(\omega,\varepsilon_0),\ \forall n \geq n_0,\ n^{-1/2}R_n(\omega) \leq \tau(1+\varepsilon)\big\} =: A_n.$$

Pour tout $\omega \in A_n$, on a

$$\forall n \geq n_0(\omega,\varepsilon_0) \quad R_n(\omega) \leq n^{1/2}\tau(1+\varepsilon), \quad \text{d'où} \quad \mathcal{E}_n(\omega) \subset D_n \subset D\Big(O, (1+\varepsilon)\sqrt{\frac{n}{3}}\Big).$$

Par la loi forte des grands nombres (question précédente), $\mathbf{P}(\Omega') = 1$, d'où $\mathbf{P}(A_n) = 1$. On a ainsi établi que presque sûrement, $\mathcal{E}_n$ est inclus dans le disque de centre O et de rayon $(1+\varepsilon)\sqrt{n/3}$ pour tout n assez grand.

La figure 1 illustre ceci. On a choisi pour cette simulation $n = 200$, $\varepsilon = 0{,}05$. Les deux cercles tracés ont respectivement pour rayon R_n et $(1+\varepsilon)\sqrt{n/3}$.

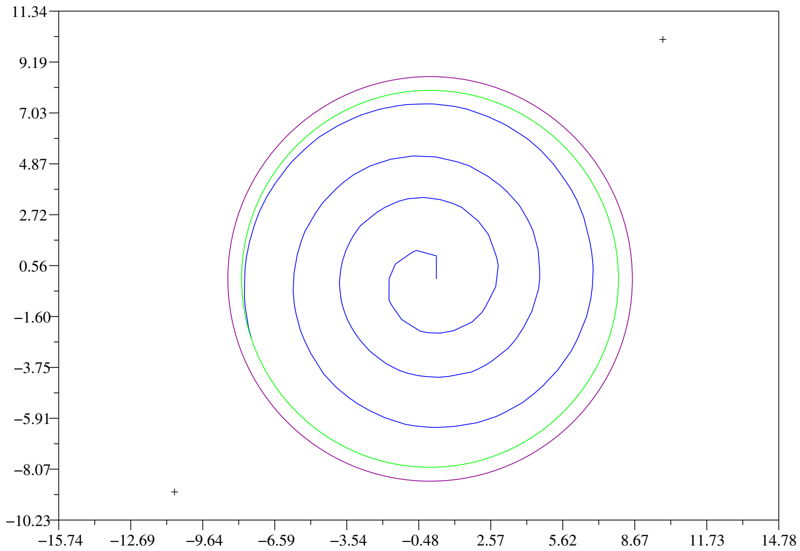

FIG. 1 – Escargot aléatoire $\mathcal{E}_{200}$ (simulation en Scilab)