

Corrigé de l'examen du 30 janvier 2004

**Ex 1.** Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires réelles, de même loi, telle que  $\mathbf{E}|X_1| < +\infty$ . On pose  $Y_n := \min(X_n, n)$ .

L'existence de  $\mathbf{E}Y_n$  résulte de la *mesurabilité* de  $Y_n$  (comme min de deux applications mesurables) et de l'*intégrabilité* de  $X_1$  via l'inégalité  $|Y_n| \leq |X_n|$ . Cette inégalité se vérifie comme suit. Si  $X_n(\omega) < n$ , on a  $Y_n(\omega) = X_n(\omega)$  et  $|Y_n(\omega)| = |X_n(\omega)|$ . Si  $X_n(\omega) \geq n$ , on a  $0 < Y_n(\omega) = n \leq X_n(\omega)$ , d'où  $|Y_n(\omega)| \leq |X_n(\omega)|$ . En intégrant l'inégalité  $|Y_n| \leq |X_n|$  sur  $\Omega$ , on obtient  $\mathbf{E}|Y_n| \leq \mathbf{E}|X_n| = \mathbf{E}|X_1| < +\infty$ . L'égalité  $\mathbf{E}|X_n| = \mathbf{E}|X_1|$  résulte du fait que  $X_n$  a même loi que  $X_1$ .

Maintenant que l'existence de  $\mathbf{E}Y_n$  est assurée, l'égalité des lois de  $X_n$  et  $X_1$  nous permet d'écrire (cf. remarque 1 ci-dessous) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{E}Y_n = \mathbf{E} \min(X_n, n) = \mathbf{E} \min(X_1, n). \quad (1)$$

Posons  $Z_n := \min(X_1, n)$ . Avec la même justification que ci-dessus, on a  $|Z_n| \leq |X_1|$ , ce qui montre que la suite  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est *dominée* par la variable aléatoire intégrable  $|X_1|$ . D'autre part  $Z_n$  converge vers  $X_1$  partout sur  $\Omega$  quand  $n$  tend vers l'infini. En effet puisque  $X_1$  est une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , pour tout  $\omega \in \Omega$ ,  $X_1(\omega)$  est fini et on peut trouver un entier  $n_0 = n_0(\omega) > X_1(\omega)$ . Pour tout  $n \geq n_0$ ,  $Z_n(\omega) = X_1(\omega)$ , la suite  $(Z_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge ainsi vers  $X_1(\omega)$ . Le théorème de convergence dominée appliqué à  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et les égalités (1) nous permettent de conclure à la convergence de  $\mathbf{E}Y_n$  vers  $\mathbf{E}X_1$ .

*Remarque 1.* Si  $X_n$  a même loi que  $X_1$ ,  $\mathbf{E}h(X_n) = \mathbf{E}h(X_1)$  pour toute application  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  qui est borélienne positive ou  $P_{X_1}$  intégrable sur  $\mathbb{R}$ . En effet grâce à l'égalité de mesures  $P_{X_n} = P_{X_1}$ , on peut écrire en utilisant deux fois le théorème de transfert :

$$\mathbf{E}h(X_1) = \int_{\Omega} h(X_1(\omega)) d\mathbf{P}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} h(x) dP_{X_1}(x) = \int_{\mathbb{R}} h(x) dP_{X_n}(x) = \mathbf{E}h(X_n).$$

Cette propriété a été utilisée d'abord avec  $h : x \mapsto |x|$ , puis avec  $h : x \mapsto \min(x, n)$ .

*Remarque 2.* Le résultat démontré reste vrai avec  $X_1$  variable aléatoire à valeurs dans  $\overline{\mathbb{R}}$  au lieu de  $\mathbb{R}$ . En effet on sait qu'une telle variable aléatoire intégrable est finie presque partout sur  $\Omega$ , donc que  $Z_n(\omega)$  converge vers  $X_1(\omega)$  presque partout sur  $\Omega$ , ce qui suffit pour satisfaire la condition de convergence dans le théorème de convergence dominée. En fait on a encore convergence partout de  $Z_n$  vers  $X_1$ , car si  $X_1(\omega) = +\infty$ , alors  $Z_n(\omega) = n$  pour tout  $n$  et la limite de  $Z_n(\omega)$  est  $+\infty$ , ce qui vaut encore  $X_1(\omega)$ .

**Ex 2.** Convergence d'espérances

On note  $X$  une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre  $a > 0$ , ce qui signifie que le loi de  $X$  a une densité  $f(t) = ae^{-at}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$  par rapport à la mesure de Lebesgue  $\lambda$ . On définit la suite de variables aléatoires  $(Y_n)_{n \geq 1}$  par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad Y_n := \left(1 + \frac{X}{n}\right)^n \mathbf{1}_{\{X \geq 0\}}.$$

Ainsi  $Y_n$  est une variable aléatoire *positive* et l'expression  $\mathbf{E}Y_n$  a toujours un sens comme élément de  $\overline{\mathbb{R}}_+$ . Le but de l'exercice est d'étudier sa limite quand  $n$  tend vers l'infini.

1) Par le transfert  $\Omega \xrightarrow{X} \mathbb{R}$ , on obtient en notant  $P_X = \mathbf{P} \circ X^{-1}$  la loi de  $X$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}Y_n &= \int_{\Omega} Y_n(\omega) d\mathbf{P}(\omega) = \int_{\Omega} \left(1 + \frac{X(\omega)}{n}\right)^n \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(X(\omega)) d\mathbf{P}(\omega) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x) dP_X(x) \\ &= \int_{[0, +\infty[} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n ae^{-ax} d\lambda(x). \end{aligned} \quad (2)$$

2) La fonction  $h : ]-1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u \mapsto v = \ln(1+u)$  est *concave* car pour tout  $u > -1$ ,  $h''(u) = -(1+u)^{-2} < 0$ . Il en résulte que la courbe d'équation  $v = h(u)$  est en tout point au dessous de sa tangente.

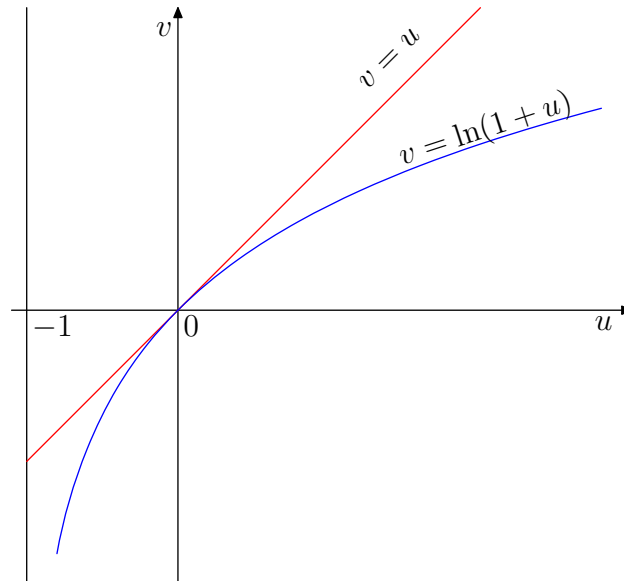


FIG. 1 – Courbe  $v = \ln(1+u)$  et sa tangente en 0

Ceci est vrai en particulier au point d'abscisse  $u_0 = 0$  et se traduit alors par l'inégalité

$$\forall u \in ]-1, +\infty[, \quad \ln(1+u) \leq u. \quad (3)$$

En prenant  $u = x/n$ , avec  $x \geq 0$  quelconque dans (3), on en déduit  $n \ln(1 + x/n) \leq x$ , d'où par croissance de la fonction exponentielle  $\exp(n \ln(1 + x/n)) \leq \exp(x)$ , ce qui s'écrit encore :

$$\forall x \geq 0, \quad \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq e^x. \quad (4)$$

3) On suppose que  $a > 1$ . Considérons la suite des fonctions mesurables positives  $f_n$  définies sur  $[0, +\infty[$  par  $f_n(x) := (1 + x/n)^n a e^{-ax}$ . D'après (2),  $\mathbf{E}Y_n = \int_{\mathbb{R}_+} f_n d\lambda$ . Nous allons établir la convergence de  $\mathbf{E}Y_n$  en montrant que  $(f_n)_{n \geq 1}$  vérifie les hypothèses du théorème de convergence dominée relativement à l'espace mesuré  $(\mathbb{R}_+, \text{Bor}(\mathbb{R}_+), \lambda)$ .

- a) *Convergence de  $(f_n)_{n \geq 1}$   $\lambda$ -p.p. sur  $\mathbb{R}_+$ .* Il est bien connu<sup>1</sup> que  $(1 + x/n)^n$  converge vers  $e^x$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . Par conséquent la suite de fonctions mesurables  $(f_n)_{n \geq 1}$  converge sur tout  $\mathbb{R}_+$  vers la fonction  $f_\infty : x \mapsto a e^{(1-a)x}$ .
- b) *Domination de  $(f_n)_{n \geq 1}$  par  $g$   $\lambda$ -intégrable.* D'après (4), on a pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,  $0 \leq f_n(x) \leq a e^{(1-a)x}$ . La suite  $(f_n)_{n \geq 1}$  est donc *dominée* par la fonction  $g = f_\infty$ . Cette fonction est *continue et positive* sur  $\mathbb{R}_+$ , on a donc  $\int_{\mathbb{R}_+} g d\lambda = \int_0^{+\infty} g(x) dx$  (égalité dans  $\overline{\mathbb{R}_+}$ ). Or l'intégrale de Riemann généralisée  $\int_0^{+\infty} g(x) dx$  est convergente, comme le montre le calcul élémentaire suivant :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} a e^{(1-a)x} dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b a e^{(1-a)x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[ \frac{a}{1-a} e^{(1-a)x} \right]_0^b \\ &= \frac{a}{1-a} \left( \lim_{b \rightarrow +\infty} e^{(1-a)b} - 1 \right) \\ &= \frac{a}{a-1} < +\infty, \end{aligned}$$

en notant que  $e^{(1-a)b}$  tend vers 0 quand  $b$  tend vers  $+\infty$  parce que  $1 - a < 0$ . On en déduit que  $g$  est  $\lambda$ -intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ .

Ainsi les deux hypothèses du théorème de convergence dominée sont satisfaites par  $(f_n)_{n \geq 1}$  et on peut intervertir limite et intégrale :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}_+} f_n d\lambda = \int_{\mathbb{R}_+} f_\infty d\lambda = \frac{a}{a-1}.$$

On en conclut que

$$\forall a > 1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E}Y_n = \frac{a}{a-1}.$$

4) Dans le cas  $0 < a \leq 1$ , on remarque que  $\int_0^{+\infty} f_\infty(x) dx = +\infty$ . C'est évident directement si  $a = 1$  puisqu'alors  $f_\infty$  est la fonction constante égale à 1 sur  $\mathbb{R}_+$ . Dans le cas  $0 < a < 1$ , cela résulte du calcul ci-dessus puisqu'alors  $1 - a > 0$  et  $e^{(1-a)b}$  tend vers  $+\infty$  quand  $b$  tend vers  $+\infty$ . On a donc  $\int_{\mathbb{R}_+} f_\infty d\lambda = +\infty$ . En combinant cette remarque avec le lemme de Fatou, il vient :

$$+\infty = \int_{\mathbb{R}_+} f_\infty d\lambda = \int_{\mathbb{R}_+} \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n d\lambda \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}_+} f_n d\lambda = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E}Y_n.$$

---

1. Sinon prendre le logarithme et utiliser  $\ln(1 + x/n) \sim x/n$  pour voir que si  $x > 0$ ,  $n \ln(1 + x/n) \sim x$ , ce qui lève la forme indéterminée, le cas  $x = 0$  étant évident directement.

Ainsi  $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E}Y_n = +\infty$ , ce qui nous permet de conclure que

$$\forall a \in ]0, 1], \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E}Y_n = +\infty.$$

*Remarque.* Il y a moyen d'unifier les solutions proposées ci-dessus dans les cas  $a > 1$  et  $0 < a \leq 1$  en utilisant le théorème de Beppo Levi au lieu du théorème de convergence dominée et du lemme de Fatou. Pour cela nous allons vérifier la *croissance de la suite*  $(f_n)_{n \geq 1}$  de fonctions mesurables positives, ce qui se réduit à celle de la suite  $(g_n)_{n \geq 1}$ , en posant  $g_n(x) := (1 + x/n)^n$ . La fonction logarithme népérien étant croissante, la croissance de la suite  $(g_n)_{n \geq 1}$  équivaut à celle de  $(\ln g_n)_{n \geq 1}$ . Une façon commode d'établir cette dernière croissance est d'utiliser la propriété suivante des fonctions *concaves*. Soit  $h$  concave sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ ,  $\mathcal{C}$  la représentation graphique de  $h$  et  $a < b$  deux réels de  $I$ . Alors la corde de  $\mathcal{C}$  entre les points d'abscisses  $a$  et  $b$  a une *pente* qui,  $a$  étant fixé, est une fonction *décroissante* de  $b$ . Cette pente varie ainsi en sens contraire de  $b$ , donc croît lorsque  $b$  se rapproche de  $a$ . En appliquant ceci à la fonction concave  $h : u \mapsto \ln(1 + u)$  avec  $a = 0$  et  $b = x/n$  pour  $x > 0$  fixé, la pente  $p_n(x)$  de la corde entre  $a$  et  $b$  s'écrit :

$$p_n(x) = \frac{\ln(1 + x/n)}{x/n} = \frac{1}{x} \ln g_n(x).$$

La croissance de la suite de pentes  $(p_n(x))_{n \geq 1}$  implique ainsi celle de la suite  $(\ln g_n(x))_{n \geq 1}$

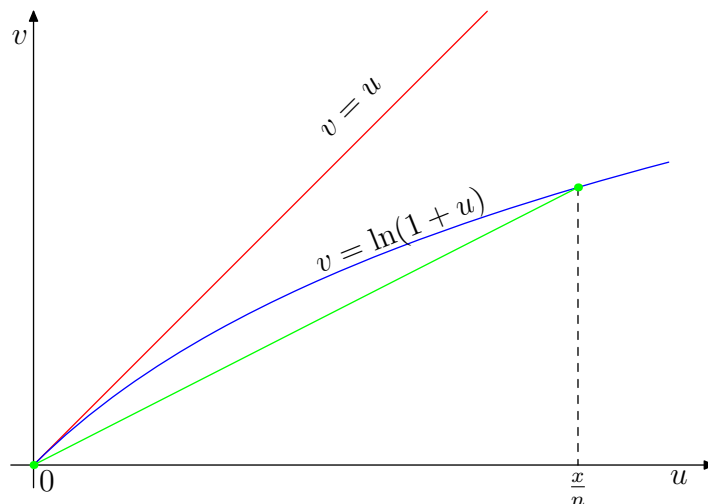


FIG. 2 – Courbe  $v = \ln(1 + u)$  et sa corde entre 0 et  $x/n$

puis celle de  $(g_n(x))_{n \geq 1}$  et ce résultat est valable pour tout  $x > 0$ . Le cas  $x = 0$  est évident directement puisque  $(g_n(0))_{n \geq 1}$  est la suite constante de valeur 1. Nous avons donc établi la croissance de la suite de fonctions mesurables positives  $(f_n)_{n \geq 1}$ . La convergence de cette suite en tout point de  $\mathbb{R}_+$  a été établie à la question 3, on peut appliquer le théorème de Beppo Levi et obtenir :

$$\mathbf{E}Y_n = \int_{\mathbb{R}_+} f_n d\lambda \uparrow \int_{\mathbb{R}_+} f_\infty d\lambda = \int_0^{+\infty} a e^{(1-a)x} dx = \begin{cases} a/(a-1) & \text{si } a > 1, \\ +\infty & \text{si } 0 < a \leq 1. \end{cases}$$

**Ex 3.** Carrés aléatoires

Soit  $(X_i)_{i \in \mathbf{N}^*}$  une suite de variables aléatoires, définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , à valeurs dans  $]0, 1[$ , indépendantes et de même loi uniforme sur  $]0, 1[$ . On pose  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$  et on note  $M_i$  le *point aléatoire* de coordonnées  $(S_i, S_i)$  dans un repère orthonormé du plan. On pose  $M_0 = O$  origine du repère. Pour  $i \in \mathbf{N}^*$ , on note  $C_i$  le *carré aléatoire* ouvert de diagonale  $M_{i-1}M_i$ .

- 1) Le carré aléatoire  $C_i$  ayant pour côté  $S_i - S_{i-1} = X_i$  a pour aire  $\lambda_2(C_i) = X_i^2$ .

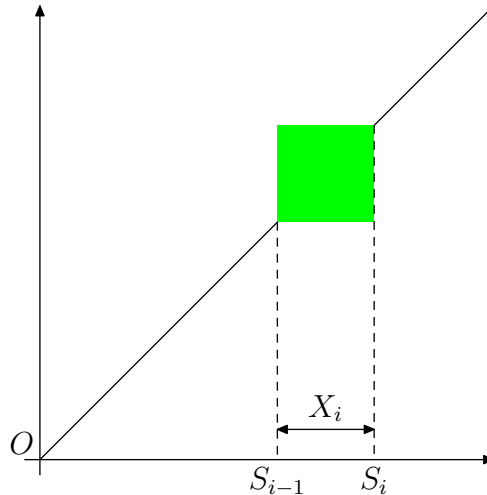


FIG. 3 – Carré aléatoire  $C_i$  d'aire  $\lambda_2(C_i) = X_i^2$

Les  $C_i$  étant deux à deux disjoints (on a pris les carrés ouverts), on a par additivité de  $\lambda_2$ ,

$$\frac{1}{n} \lambda_2(E_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2. \quad (5)$$

Les  $X_i$  sont indépendantes et de même loi. Les  $X_i^2$  héritent de ces deux propriétés puisque  $X_i^2 = h(X_i)$  où  $h$  est la fonction<sup>2</sup> borélienne  $x \mapsto x^2$ . De plus la variable  $X_1$  étant bornée ( $0 \leq X_1 \leq 1$ ) a des moments de tout ordre d'où en particulier  $\mathbf{E}X_1^2 < +\infty$ . La suite  $(X_i^2)_{i \geq 1}$  vérifie donc toutes les hypothèses de la loi forte des grands nombres de Khintchine, d'où

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} \mathbf{E}X_1^2. \quad (6)$$

Pour calculer cette limite, on rappelle que la loi uniforme sur  $]0, 1[$  a pour densité par rapport à  $\lambda_1$  la fonction  $\mathbf{1}_{]0,1[}$ . Par transfert  $\Omega \xrightarrow{X_1} \mathbb{R}$ , on en déduit

$$\mathbf{E}X_1^2 = \int_{\Omega} X_1(\omega)^2 d\mathbf{P}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} x^2 dP_X(x) = \int_{\mathbb{R}} x^2 \mathbf{1}_{]0,1[}(x) d\lambda_1(x) = \int_{]0,1[} x^2 d\lambda_1(x). \quad (7)$$

2. L'indépendance serait conservée même pour des  $h_i(X_i)$  avec  $h_i$  borélienne. Par contre avec des  $h_i$  dépendant de  $i$ , on ne pourrait plus affirmer que les  $h_i(X_i)$  ont même loi.

La fonction  $h : x \mapsto x^2$  étant continue sur l'intervalle fermé  $[0, 1]$ , ses intégrales au sens de Lebesgue (relativement à  $\lambda_1$ ) et de Riemann coïncident, d'où

$$\int_{]0,1[} x^2 d\lambda_1(x) = \int_0^1 x^2 dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}. \quad (8)$$

En rassemblant (5)–(8), on conclut que

$$\frac{1}{n} \lambda_2(E_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} \frac{1}{3}.$$

2) Soit  $a \in ]0, 1[$  et  $\Delta_a$  la droite d'équation  $y = x + a$ . On se propose de calculer la probabilité  $\mathbf{P}(\Delta_a \cap C_i \neq \emptyset)$  et d'en déduire la loi de  $T_n$ , nombre de  $C_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) ayant une intersection non vide avec  $\Delta_a$ .

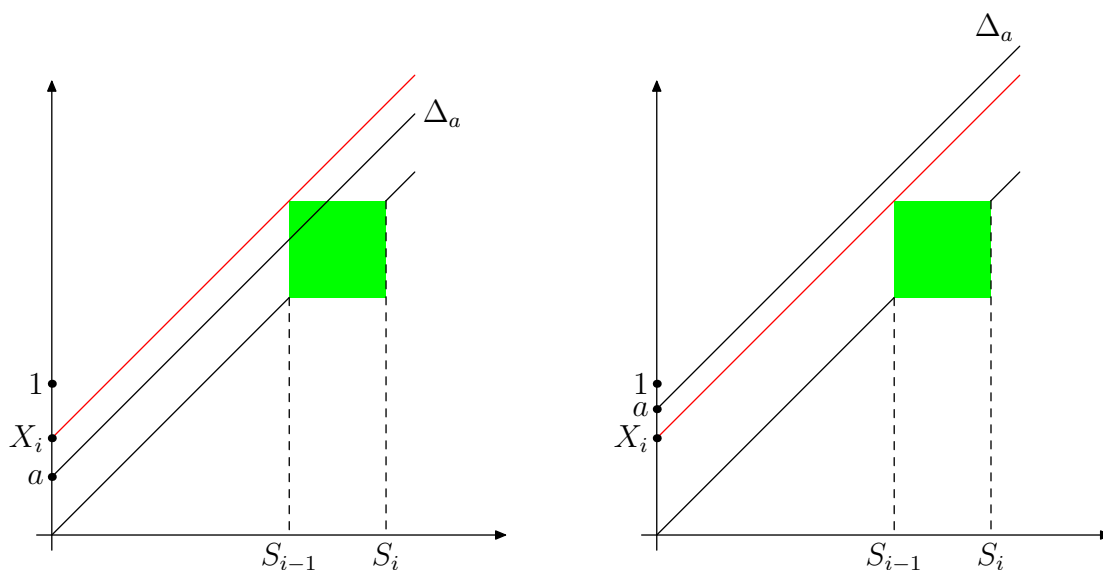


FIG. 4 –  $C_i \cap \Delta_a \neq \emptyset$  si et seulement si  $X_i > a$

Pour cela on commence par remarquer que  $\Delta_a$  intersecte le carré  $C_i$  si et seulement si  $a < X_i$ , voir figure 4. En rappelant que  $X_i$  suit la loi uniforme sur  $]0, 1[$ , on en déduit :

$$\mathbf{P}(\Delta_a \cap C_i \neq \emptyset) = \mathbf{P}(X_i > a) = \frac{\lambda_1(]a, +\infty[ \cap ]0, 1[)}{\lambda_1(]0, 1[)} = \lambda_1(]a, 1[) = 1 - a.$$

L'égalité d'évènements  $\{\Delta_a \cap C_i \neq \emptyset\} = \{X_i > a\}$  permet d'écrire

$$T_n = \sum_{i=1}^n Y_i \quad \text{avec} \quad Y_i := \mathbf{1}_{\{X_i > a\}}.$$

Les  $Y_i$  s'écrivent  $Y_i = h(X_i)$  où  $h$  est la fonction mesurable  $\mathbf{1}_{]a, +\infty[}$ . Elles héritent donc de l'indépendance des  $X_i$ . De plus les  $Y_i$  sont des variables aléatoires de Bernoulli de même

paramètre  $p = \mathbf{E}Y_i = \mathbf{P}(X_i > a) = 1 - a$ . Leur somme  $T_n$  suit donc la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p = 1 - a$ . Autrement dit,

$$T_n(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\} \quad \text{et} \quad \forall k \in T_n(\Omega), \mathbf{P}(T_n = k) = C_n^k (1 - a)^k a^{n-k}.$$

### Problème

Ce problème est consacré à l'algorithme du rejet. La méthode du rejet (appelée aussi d'acceptation-rejet) peut être décrite abstraitement comme suit. On suppose que l'on sait générer un vecteur aléatoire  $M$  de  $\mathbb{R}^d$  suivant une certaine loi  $\mu$ . On génère alors l'un après l'autre les vecteurs aléatoires  $M_1, \dots, M_n, \dots$  mutuellement indépendants et de même loi que  $M$ , en s'arrêtant au premier d'entre eux qui vérifie une certaine condition  $(\mathcal{H}_0)$ . Soit  $T$  l'indice (aléatoire) correspondant. On a ainsi fabriqué un vecteur (doublement) aléatoire  $M_T$ . Comme  $T$  est aléatoire, la loi de ce vecteur n'est pas celle de  $M$ , c'est une nouvelle loi  $\nu$ . Si la simulation de  $M$  et le test de  $(\mathcal{H}_0)$  sont facilement programmables, on dispose ainsi d'une méthode pour générer un vecteur aléatoire de loi  $\nu$ .

### Préliminaire

Soit  $B$  un borélien de  $\mathbb{R}^d$  tel que  $0 < \lambda_d(B) < +\infty$ ,  $\lambda_d$  désignant la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^d$ . On dit que le vecteur aléatoire  $M : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  suit la loi uniforme sur  $B$ , notation  $M \sim \text{Unif}(B)$ , si sa loi  $P_M$  est donnée par

$$\forall A \in \text{Bor}(\mathbb{R}^d), P_M(A) = \mathbf{P}(M \in A) = \frac{\lambda_d(A \cap B)}{\lambda_d(B)}. \quad (9)$$

On rappelle que cette condition équivaut à l'existence pour la mesure  $P_M$  d'une densité de la forme  $c\mathbf{1}_B$  par rapport à  $\lambda_d$ , avec une constante  $c > 0$ .

1) Soit  $M$  un vecteur aléatoire de loi uniforme sur  $B$  et  $\varphi$  est une *bijection linéaire*  $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ . Vérifions que  $\varphi(M)$  suit la loi uniforme sur  $\varphi(B)$ . On sait (cf. cours, chapitre 5) que  $\lambda_d \circ \varphi^{-1} = c\lambda_d$ , où la constante  $c = |\det(\varphi^{-1})|$  est strictement positive. Soit  $A'$  un borélien quelconque de  $\mathbb{R}^d$ . Puisque  $M$  suit la loi uniforme sur  $B$ , on a :

$$\mathbf{P}(\varphi(M) \in A') = \mathbf{P}(M \in \varphi^{-1}(A')) = \frac{\lambda_d(\varphi^{-1}(A') \cap B)}{\lambda_d(B)} \quad (10)$$

Posons  $B' := \varphi(B)$ . Comme  $\varphi$  est *injective*, on a  $B = \varphi^{-1}(B')$ , voir la justification ci-dessous. On peut alors écrire  $\varphi^{-1}(A') \cap B = \varphi^{-1}(A') \cap \varphi^{-1}(B') = \varphi^{-1}(A' \cap B')$ . En reportant dans (10), on obtient

$$\mathbf{P}(\varphi(M) \in A') = \frac{(\lambda_d \circ \varphi^{-1})(A' \cap B')}{(\lambda_d \circ \varphi^{-1})(B')} = \frac{c\lambda_d(A' \cap B')}{c\lambda_d(B')} = \frac{\lambda_d(A' \cap B')}{\lambda_d(B')},$$

ce qui montre que  $\varphi(M)$  suit la loi uniforme sur  $B'$ , puisque  $A'$  était quelconque.

*Justification de  $\varphi^{-1}(B') = B$ .* Par définition de l'inverse *ensembliste*  $\varphi^{-1}$  et de l'image ensembliste  $B' = \varphi(B)$ , on a

$$\varphi^{-1}(B') = \{x \in \mathbb{R}^d; \varphi(x) \in B'\} = \{x \in \mathbb{R}^d; \exists y \in B, \varphi(x) = \varphi(y)\}. \quad (11)$$

Comme  $\varphi$  est injective, l'égalité  $\varphi(x) = \varphi(y)$  équivaut à  $x = y$ . En reportant dans (11), on obtient

$$\varphi^{-1}(B') = \{x \in \mathbb{R}^d; \exists y \in B, x = y\} = B.$$

*Remarque.* Les seules propriétés de  $\varphi$  utilisées dans cette démonstration sont  $\lambda_d \circ \varphi^{-1} = c\lambda_d$  et l'injectivité de  $\varphi$ . On en déduit immédiatement que si  $h$  est une injection mesurable  $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  telle que  $\lambda_d \circ h^{-1} = c\lambda_d$  pour une certaine constante  $c > 0$ , alors  $h(M)$  suit la loi uniforme sur  $h(B)$ . Ceci s'applique notamment au cas où  $h$  est une bijection affine  $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ , c'est-à-dire la composée d'une bijection linéaire  $\varphi$  avec une translation  $\tau$ .

## Partie 1

On suppose désormais que  $(M_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$  est une suite de vecteurs aléatoires  $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ , mutuellement *indépendants* et de *même loi*  $\mu$  telle que  $\mu(B) > 0$ . On assimilera pour la commodité du langage le vecteur  $M_i(\omega)$  à un point de  $\mathbb{R}^d$ .

2) Pour tout  $\omega \in \Omega$ , on pose

$$T(\omega) := \inf\{i \in \mathbb{N}^*; M_i(\omega) \in B\},$$

avec la convention  $\inf \emptyset = +\infty$ .  $T$  est donc le numéro du premier point « tombé » dans  $B$ . Nous allons montrer que  $T$  est une variable aléatoire discrète suivant la loi géométrique de paramètre  $p = \mu(B)$ . On note  $q := 1 - p$ .

Commençons par justifier la mesurabilité de  $T$ , application de  $\Omega$  dans  $\overline{\mathbb{N}^*} = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ . Les tribus concernées par cette mesurabilité sont  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{P}(\overline{\mathbb{N}^*})$ . En raison de la dénombrabilité de  $\overline{\mathbb{N}^*}$ , il suffit de vérifier que

$$\forall k \in \overline{\mathbb{N}^*}, \quad T^{-1}(\{k\}) \in \mathcal{F}. \quad (12)$$

Si  $k \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$\{T = k\} = \{\forall i < k, M_i \notin B \text{ et } M_k \in B\} = \left( \bigcap_{1 \leq i < k} M_i^{-1}(B^c) \right) \cap M_k^{-1}(B), \quad (13)$$

tandis que dans le cas particulier  $k = +\infty$ ,

$$\{T = +\infty\} = \{\forall i \in \mathbb{N}^*, M_i \notin B\} = \bigcap_{i \in \mathbb{N}^*} M_i^{-1}(B^c). \quad (14)$$

Les  $M_i$  étant des vecteurs aléatoires dans  $\mathbb{R}^d$ , donc mesurables  $\mathcal{F}$ -Bor( $\mathbb{R}^d$ ), l'image réciproque par  $M_i$  d'un borélien quelconque de  $\mathbb{R}^d$  est un élément de  $\mathcal{F}$ . Il résulte alors de (13) et de (14) que  $T^{-1}(\{k\})$  est intersection finie ou dénombrable d'éléments de  $\mathcal{F}$ , ce qui établit (12). Ainsi  $T$  est bien une variable aléatoire discrète à valeurs dans  $\overline{\mathbb{N}^*}$ .



Sa loi est caractérisée par les  $\mathbf{P}(T = k)$ . Posons  $p = \mu(B) = \mathbf{P}(M_i \in B)$ . Si  $k \in \mathbb{N}^*$ , (13) et l'indépendance des  $M_i$  nous donnent

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(T = k) = (1 - p)^{k-1}p. \quad (15)$$

Calculons  $\mathbf{P}(T = +\infty)$ . Par hypothèse  $\mu(B) > 0$ , donc  $1 - p = \mu(B^c) = \mathbf{P}(M_i^{-1}(B^c))$  est strictement inférieur à 1. En remarquant que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on a l'inclusion  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}^*} M_i^{-1}(B^c) \subset \bigcap_{i \leq n} M_i^{-1}(B^c)$ , on a par indépendance  $\mathbf{P}(T = +\infty) \leq (1 - p)^n$ , d'où en faisant tendre  $n$  vers l'infini,

$$\mathbf{P}(T = +\infty) = 0. \quad (16)$$

Compte-tenu de (15) et (16), la loi de  $T$  peut s'écrire

$$P_T = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} pq^{k-1} \delta_k,$$

c'est donc bien la loi géométrique de paramètre  $p = \mu(B)$ .

3) Calculons maintenant  $\mathbf{P}(M_k \in A \cap B \text{ et } T = k)$  pour  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $A \in \text{Bor}(\mathbb{R}^d)$ . Comme  $A \cap B$  est inclus dans  $B$ , on a clairement

$$\begin{aligned} \{M_k \in A \cap B \text{ et } T = k\} &= \{\forall i < k, M_i \notin B \text{ et } M_k \in A \cap B\} \\ &= \left( \bigcap_{1 \leq i < k} M_i^{-1}(B^c) \right) \cap M_k^{-1}(A \cap B), \end{aligned}$$

d'où par indépendance des  $M_i$ ,

$$\mathbf{P}(M_k \in A \cap B \text{ et } T = k) = q^{k-1} \mathbf{P}(M_k^{-1}(A \cap B)) = q^{k-1} \mu(A \cap B). \quad (17)$$

4) On définit  $M_T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  par

$$M_T(\omega) := \begin{cases} M_{T(\omega)}(\omega) & \text{si } T(\omega) < +\infty, \\ 0 & \text{si } T(\omega) = +\infty. \end{cases}$$

Cette définition équivaut à

$$M_T = \sum_{k \in \overline{\mathbb{N}^*}} M_k \mathbf{1}_{\{T=k\}},$$

ce qui montre que  $M_T$  est mesurable  $\mathcal{F}$ - $\text{Bor}(\mathbb{R}^d)$ , c'est donc bien un *vecteur aléatoire*. Pour trouver sa loi, calculons  $\mathbf{P}(M_T \in A)$  pour  $A$  borélien quelconque de  $\mathbb{R}^d$ . En partitionnant  $\Omega$  par les événements  $\{T = k\}$ ,  $k \in \overline{\mathbb{N}^*}$ , on a

$$\mathbf{P}(M_T \in A) = \sum_{k \in \overline{\mathbb{N}^*}} \mathbf{P}(M_T \in A \text{ et } T = k). \quad (18)$$

En raison de l'inclusion  $\{M_T \in A \text{ et } T = +\infty\} \subset \{T = +\infty\}$  et de (16), le terme indexé par  $k = +\infty$  dans cette « série » est nul. Pour calculer le terme général indexé

par  $k \in \mathbb{N}^*$ , exprimons l'évènement  $E_{A,k} := \{M_T \in A \text{ et } T = k\}$  à l'aide de  $M_k$  et de  $T$ . Il est commode de raisonner sur un élément quelconque  $\omega$  de  $E_{A,k}$  :

$$\begin{aligned} \omega \in E_{A,k} &\Leftrightarrow M_{T(\omega)}(\omega) \in A \text{ et } T(\omega) = k \\ &\Leftrightarrow M_k(\omega) \in A \text{ et } T(\omega) = k \text{ et } M_k(\omega) \in B \\ &\Leftrightarrow M_k(\omega) \in A \cap B \text{ et } T(\omega) = k. \end{aligned}$$

On voit ainsi que

$$E_{A,k} = \{M_k \in A \cap B \text{ et } T = k\}.$$

D'après (17), la probabilité de cet évènement est  $q^{k-1}\mu(A \cap B)$ . En reportant ce résultat dans (18), on obtient (en notant<sup>3</sup> que  $0 \leq q < 1$ )

$$\mathbf{P}(M_T \in A) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} q^{k-1} \mu(A \cap B) = \mu(A \cap B) \sum_{j \in \mathbb{N}} q^j = \frac{\mu(A \cap B)}{1 - q}.$$

En se souvenant que  $1 - q = p = \mu(B)$ , on aboutit à

$$\mathbf{P}(M_T \in A) = \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(B)} = \mu(A | B). \quad (19)$$

Ceci étant valable pour tout borélien  $A$  de  $\mathbb{R}^d$ , on en conclut que la loi du vecteur aléatoire  $M_T$  est la mesure de probabilité conditionnelle  $\nu := \mu(\cdot | B)$ .

5) Soient  $B$  et  $C$  deux boréliens tels que  $B \subset C$  et  $0 < \lambda_d(B) < \lambda_d(C) < +\infty$  et soit  $\mu$  la loi uniforme sur  $C$ . Alors pour tout  $A \in \text{Bor}(\mathbb{R}^d)$ , (19) s'écrit :

$$\mathbf{P}(M_T \in A) = \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(B)} = \frac{\frac{\lambda_d(A \cap B \cap C)}{\lambda_d(C)}}{\frac{\lambda_d(B \cap C)}{\lambda_d(C)}} = \frac{\lambda_d(A \cap B \cap C)}{\lambda_d(B \cap C)} = \frac{\lambda_d(A \cap B)}{\lambda_d(B)},$$

ce qui montre que  $M_T$  suit la loi uniforme sur  $B$ .

6) On dispose seulement d'un générateur de nombres au hasard capable de simuler une suite aussi longue que l'on veut  $U_1, \dots, U_\ell$  de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur  $[0, 1]$ . On s'intéresse au coût de l'algorithme du rejet pour la simulation d'un « échantillon »  $M_{T_1}, \dots, M_{T_n}$  de vecteurs aléatoires *indépendants*<sup>4</sup> de même loi que  $M_T$ . Ce coût sera mesuré par le nombre  $S_n$  de variables  $U_i$  utilisées.

On suppose dans cette question que  $B$  est *borné*. On peut alors choisir  $C$  de la forme  $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_d, b_d]$ .

6 a) Le vecteur aléatoire  $M = (X_1, \dots, X_d)$  défini par

$$X_j := a_j + (b_j - a_j)U_j, \quad j = 1, \dots, d,$$

3. Comme  $\mu(B) > 0$ ,  $q = 1 - \mu(B) < 1$ . Soit dit en passant, on peut supposer aussi que  $\mu(B) < 1$  et donc que  $q > 0$  sans perdre de généralité. En effet si  $\mu(B) = 1$ , on est sûr que  $M_i$  va tomber dans  $B$  dès la première tentative, autrement dit,  $\mathbf{P}(M_T = M_1) = 1$ . Dans ce cas l'algorithme du rejet est sans intérêt puisque  $M_T$  a même loi que  $M_1$  que l'on sait simuler *a priori*.

4. On admettra qu'il suffit pour cela de lancer  $n$  fois l'algorithme du rejet et que les variables aléatoires  $T_1, \dots, T_n$  sont indépendantes.

suit la loi uniforme sur  $C$ . Pour le voir on remarque que  $M = h(U)$ , avec  $U := (U_1, \dots, U_d)$  et  $h = \tau \circ \varphi$ , où l'on a noté

$$\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad (u_1, \dots, u_d) \mapsto (x_1, \dots, x_d) = ((b_1 - a_1)u_1, \dots, (b_d - a_d)u_d)$$

et

$$\tau : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad (x_1, \dots, x_d) \mapsto (a_1, \dots, a_d) + (x_1, \dots, x_d).$$

La translation  $\tau$  est une bijection mesurable vérifiant  $\lambda_d \circ \tau^{-1} = \lambda_d$ . De son côté, l'application linéaire  $\varphi$  est *bijjective* car l'hypothèse  $\lambda_d(B) > 0$  et l'inclusion  $B \subset [a_1, b_1] \times \dots \times [a_d, b_d]$  impliquent qu'aucun  $(b_j - a_j)$  ne peut être nul. Ainsi l'application  $h = \tau \circ \varphi$  est une bijection mesurable telle que  $\lambda_d \circ h^{-1} = c\lambda_d$  avec  $c > 0$ . Elle transforme l'hypercube  $[0, 1]^d$  en le pavé  $C = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_d, b_d]$ . D'après la remarque faite à la question 1, il nous suffit alors de vérifier que  $U$  suit la loi uniforme sur  $[0, 1]^d$  pour en déduire que  $M = h(U)$  suit la loi uniforme sur  $C = h(U)$ . Les  $U_i$  de même loi uniforme sur  $[0, 1]$  ont chacune pour densité  $f_i := \mathbf{1}_{[0,1]}$  par rapport à  $\lambda_1$ . Par indépendance des  $U_i$ , le vecteur  $U = (U_1, \dots, U_d)$  a pour densité par rapport à  $\lambda_d$  :

$$f_U = f_1 \otimes \dots \otimes f_d = \mathbf{1}_{[0,1]} \otimes \dots \otimes \mathbf{1}_{[0,1]} = \mathbf{1}_{[0,1]^d},$$

ce qui est bien la densité de la loi uniforme sur  $[0, 1]^d$ .

6 b) Pour générer  $M_{T_k}$ , il faut générer  $T_k$  vecteurs  $M_i$  et la fabrication de chaque  $M_i$  consomme  $d$  variables aléatoires  $U_j$  uniformes sur  $[0, 1]$ . La simulation de l'échantillon  $M_{T_1}, \dots, M_{T_n}$  consomme donc en tout

$$S_n = (T_1 + \dots + T_n)d$$

variables aléatoires de loi uniforme sur  $[0, 1]$ .

Les variables aléatoires  $T_k$  sont indépendantes et de même loi géométrique de paramètre

$$p = \mu(B) = \frac{\lambda_d(B \cap C)}{\lambda_d(C)} = \frac{\lambda_d(B)}{\lambda_d(C)} = \frac{1}{\tau}.$$

Elles ont une espérance finie  $\mathbf{E}T_1 = 1/p = \tau$ . Par la loi forte des grands nombres de Khintchine, on a donc

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} \tau d.$$

6 c) Si l'on mesure le coût de l'algorithme par cette limite  $\tau d$ , il est clair que la minimisation de ce coût revient à celle de  $\tau$ .

Puisque  $B \subset C$ , on a  $\tau \geq 1$ . Il est clair que le choix  $\tau = 1$  n'est pas réaliste (cf. note n° 3 au bas de la page 10) puisqu'alors l'algorithme du rejet serait inutile. En fait il s'agit ici de minimiser  $\tau$  sur la classe des pavés  $C = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_d, b_d]$  contenant  $B$ . On peut voir que le minimum de  $\tau$  est atteint pour le pavé  $C_0 = [\alpha_1, \beta_1] \times \dots \times [\alpha_d, \beta_d]$  où les  $\alpha_j, \beta_j$  sont définis comme suit. On note  $\pi_j$  la projection sur la  $j^{\text{e}}$  coordonnée :

$$\pi_j : (x_1, \dots, x_j, \dots, x_d) \mapsto x_j, \quad 1 \leq j \leq d$$

et on pose

$$\alpha_j := \inf\{\pi_j(x); x \in B\}, \quad \beta_j := \sup\{\pi_j(x); x \in B\}, \quad 1 \leq j \leq d.$$

Pour tout  $j = 1, \dots, d$ , l'inclusion  $B \subset C = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_d, b_d]$  implique  $\pi_j(B) \subset \pi_j(C) = [a_j, b_j]$ . De cette dernière inclusion entre parties de  $\mathbb{R}$ , on déduit les inégalités  $\inf \pi_j(B) \geq a_j$  et  $\sup \pi_j(B) \leq b_j$ , d'où  $[\alpha_j, \beta_j] \subset [a_j, b_j]$  et finalement  $C_0 \subset C$ . D'autre part il est clair que  $C_0$  contient  $B$  puisque si  $x$  est un élément quelconque de  $B$ , en l'écrivant  $x = (\pi_1(x), \dots, \pi_d(x))$ , on voit que pour tout  $j = 1, \dots, d$ , on a  $\alpha_j \leq \pi_j(x) \leq \beta_j$  et donc que  $x$  appartient à  $C_0$ .

Dans le cas particulier où  $d = 2$  et  $B$  est le disque unité, on voit immédiatement que  $C_0$  est le carré  $[-1, 1]^2$  circonscrit au disque unité. Sur cet exemple la valeur minimale de  $\tau$  est donc  $\lambda_2(C_0)/\lambda_2(B) = 4/\pi \simeq 1,273$ .

## Partie 2

On s'intéresse maintenant à la simulation de vecteurs aléatoires de loi uniforme sur un borélien  $B$  de  $\mathbb{R}^2$  dont la frontière a pour équation en coordonnées polaires  $r = \cos(2t)$ . On peut découper  $B$  en quatre « pétales »  $B_0, B_1, B_2, B_3$ , où

$$B_0 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq r \leq \cos(2t), -\pi/4 \leq t \leq \pi/4\},$$

et les autres pétales se déduisent de  $B_0$  par rotation de centre  $O$  et d'angles  $\pi/2, \pi, 3\pi/2$ , cf. figure 5.

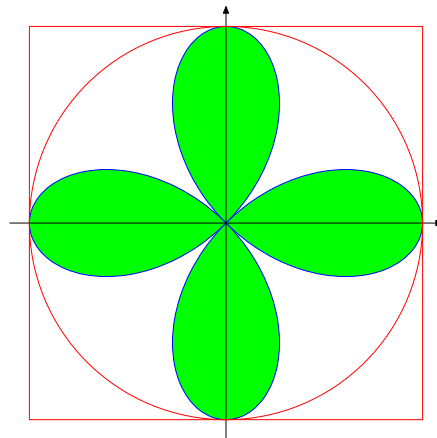
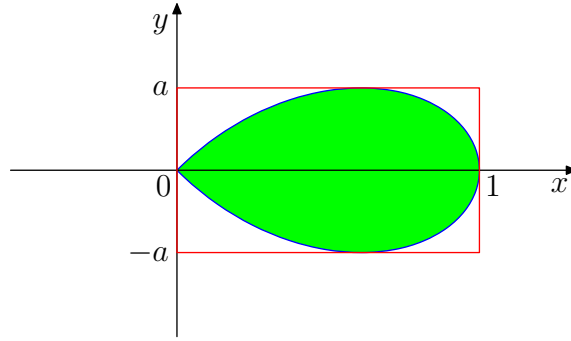


FIG. 5 – Ensemble  $B$ , cercle et carré circonscrits

7) *Calcul de l'aire  $\lambda_2(B_0)$ .* Commençons par préciser la définition de  $B_0$  en notant  $\varphi$  le passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires qu'il est commode ici de définir comme suit. Notons  $W$  et  $W'$  les ouverts

$$W := \mathbb{R}^2 \setminus ]-\infty, 0] \times \{0\}, \quad W' := ]0, +\infty[ \times ]-\pi, \pi[.$$

FIG. 6 – Ensemble  $B_0$  et rectangle circonscrit  $C_0 = [0, 1] \times [-a, a]$ 

Posons en outre

$$W_0 := W \cup \{(0, 0)\}, \quad W'_0 := W' \cup \{(0, 0)\}.$$

On définit  $\varphi : W_0 \rightarrow W'_0$  en posant  $\varphi(0, 0) := 0$  et pour  $(x, y) \in W$ ,  $\varphi(x, y) = (r, t)$  où  $(r, t)$  est l'unique élément de  $W'$  tel que  $x = r \cos t$  et  $y = r \sin t$ . Ainsi définie,  $\varphi$  est une *bijection* de  $W_0$  sur  $W'_0$  et un  $C^1$  difféomorphisme de l'*ouvert*  $W$  sur l'*ouvert*  $W'$ . Définissons maintenant

$$B'_0 := \{(r, t) \in W'_0; 0 \leq r \leq \cos(2t), -\pi/4 \leq t \leq \pi/4\}.$$

Avec ces notations, on peut réécrire la définition de  $B_0$  sous la forme

$$B_0 = \{(x, y) \in W_0; \varphi(x, y) \in B'_0\}.$$

Pour calculer  $\lambda_2(B_0)$ , on utilise le passage en coordonnées polaires :

$$\lambda_2(B_0) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{B_0}(x, y) d\lambda_2(x, y) = \int_W \mathbf{1}_{B_0}(x, y) d\lambda_2(x, y) = \int_{W'} \mathbf{1}_{B_0}(\varphi^{-1}(r, t)) r d\lambda_2(r, t).$$

En raison de l'équivalence entre «  $\varphi^{-1}(r, t) \in B_0$  » et «  $(r, t) \in \varphi(B_0) = B'_0$  », on a  $\mathbf{1}_{B_0}(\varphi^{-1}(r, t)) = \mathbf{1}_{B'_0}(r, t)$ , d'où

$$\lambda_2(B_0) = \int_{]0, +\infty[ \times ]-\pi, \pi[} \mathbf{1}_{B'_0}(r, t) r d(\lambda_1 \otimes \lambda_1)(r, t).$$

Cette dernière intégrale se calcule grâce au théorème de Fubini-Tonelli. La section à  $t$  fixé de  $B'_0$  étant  $[0, \cos(2t)]$ , on obtient en utilisant aussi la coïncidence entre intégrales de Lebesgue et de Riemann pour une fonction continue sur un intervalle fermé borné :

$$\lambda_2(B_0) = \int_{[-\pi/4, \pi/4]} \int_{]0, \cos(2t)]} r d\lambda_1(r) d\lambda_1(t) = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left[ \frac{r^2}{2} \right]_0^{\cos(2t)} dt = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\cos^2(2t)}{2} dt.$$

Cette dernière intégrale se calcule par linéarisation grâce à la formule  $1 + \cos u = 2 \cos^2(u/2)$  :

$$\lambda_2(B_0) = \frac{1}{4} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (1 + \cos(4t)) dt = \frac{\pi}{8}.$$

Déterminons maintenant le rectangle  $C_0$  minimal contenant  $B_0$ . Il s'écrit  $C_0 = [0, 1] \times [-a, a]$ , où  $a := \sup\{y; (x, y) \in B_0\}$ . Pour cela on cherche les points à tangente horizontale de la frontière de  $B_0$  d'équation polaire  $r = \cos(2t)$ ,  $-\pi/4 \leq t \leq \pi/4$ . Une représentation paramétrique de cette frontière étant donnée par

$$\begin{cases} x(t) = \cos(2t) \cos t, \\ y(t) = \cos(2t) \sin t, \end{cases}$$

on est ramené à la résolution de l'équation  $y'(t) = 0$ . Par symétrie, on peut se limiter à  $t \in [0, \pi/4]$ . Le calcul élémentaire

$$y'(t) = -2 \sin(2t) \sin t + \cos(2t) \cos t = -4 \sin^2 t \cos t + (1 - 2 \sin^2 t) \cos t = (1 - 6 \sin^2 t) \cos t,$$

montre que l'équation  $y'(t) = 0$  a pour unique solution sur  $[0, \pi/4]$ , l'unique réel  $t_0$  tel que

$$\sin t_0 = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

L'étude du signe de  $y'(t)$  pour  $0 \leq t \leq t_0$  et  $t_0 \leq t \leq \pi/4$  montre que  $y(t_0)$  réalise le maximum pour les valeurs de  $y(t)$ . On a donc  $a = y(t_0)$ . Pour achever le calcul de  $a$ , on remarque que  $1 - \cos(2t_0) = 2 \sin^2(t_0) = 2/6 = 1/3$ , d'où  $\cos(2t_0) = 2/3$  et

$$a = y(t_0) = \cos(2t_0) \sin t_0 = \frac{2}{3\sqrt{6}}.$$

Finalement,  $\lambda_2(C_0) = 2a$  et

$$\tau = \frac{\lambda_2(C_0)}{\lambda_2(B_0)} = \frac{32}{3\pi\sqrt{6}} \simeq 1,386.$$

8) Soit  $(U, V)$  un vecteur aléatoire à composantes indépendantes de même loi uniforme sur  $[0, 1]$ . On définit le vecteur aléatoire

$$(X, Y) := (U^{1/2} \cos(2\pi V), U^{1/2} \sin(2\pi V)).$$

Montrons que  $(X, Y)$  suit la loi uniforme sur le disque de centre  $O$  et de rayon 1. Pour cela on calcule de deux façons  $\mathbf{E}h(X, Y)$ ,  $h$  désignant une fonction borélienne positive quelconque.

1<sup>re</sup> façon, par transfert  $\Omega \xrightarrow{(X,Y)} \mathbb{R}^2$  :

$$\mathbf{E}h(X, Y) = \int_{\Omega} h(X(\omega), Y(\omega)) d\mathbf{P}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^2} h(x, y) dP_{(X,Y)}(x, y). \quad (20)$$

2<sup>e</sup> façon, par transfert  $\Omega \xrightarrow{(U,V)} \mathbb{R}^2$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}h(X, Y) &= \int_{\Omega} h(U(\omega)^{1/2} \cos(2\pi V(\omega)), U(\omega)^{1/2} \sin(2\pi V(\omega))) d\mathbf{P}(\omega) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} h(u^{1/2} \cos(2\pi v), u^{1/2} \sin(2\pi v)) dP_{(U,V)}(u, v) \end{aligned} \quad (21)$$

$$= \int_{]0,1]^2} h(u^{1/2} \cos(2\pi v), u^{1/2} \sin(2\pi v)) d\lambda_2(u, v). \quad (22)$$

Le passage de (21) à (22) exploite le fait que  $U$  et  $V$  étant indépendantes et de même loi uniforme sur  $[0, 1]$ , le vecteur aléatoire  $(U, V)$  a pour densité  $\mathbf{1}_{[0,1]^2}$  par rapport à  $\lambda_2$ . De plus, on peut dans (22) intégrer sur le carré ouvert  $]0, 1[^2$  au lieu de  $[0, 1]^2$  car la frontière de ce dernier est la réunion de quatre segments de  $\lambda_2$ -mesure nulle.

Il est alors naturel de poser dans (22),

$$(x, y) = (u^{1/2} \cos(2\pi v), u^{1/2} \sin(2\pi v)). \quad (23)$$

Pour préciser ce changement de variables, les notations suivantes nous seront utiles :

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x^2 + y^2 < 1\}, \quad \Delta := D \setminus [0, 1[ \times \{0\}.$$

L'application  $\varphi : (u, v) \mapsto (x, y)$  où  $(x, y)$  est donné par (23) réalise clairement une bijection de l'ouvert  $]0, 1[^2$  sur l'ouvert  $\Delta$ . Ses quatre dérivées partielles apparaissant dans le calcul de son jacobien ci-dessous sont visiblement continues sur  $]0, 1[^2$ , donc  $\varphi$  est de classe  $C^1$ .

$$\text{Jac}(\varphi)(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}u^{-1/2} \cos(2\pi v) & -2\pi u^{1/2} \sin(2\pi v) \\ \frac{1}{2}u^{-1/2} \sin(2\pi v) & 2\pi u^{1/2} \cos(2\pi v) \end{vmatrix} = \pi.$$

On voit ainsi que  $\text{Jac}(\varphi)(u, v)$  ne s'annule en aucun point de  $]0, 1[^2$ . Le théorème d'inversion globale nous dit alors que  $\varphi$  est un  $C^1$  difféomorphisme de  $]0, 1[^2$  sur  $\Delta$ . De plus on a la relation

$$\text{Jac}(\varphi^{-1})(x, y) = \frac{1}{\text{Jac}(\varphi)(\varphi^{-1}(x, y))} = \frac{1}{\pi}.$$

La formule de changement de variable par le  $C^1$ -difféomorphisme  $\varphi$  appliquée à l'intégrale (22) nous donne finalement :

$$\mathbf{E}h(X, Y) = \int_{\Delta} h(x, y) \frac{1}{\pi} d\lambda_2(x, y) = \int_D h(x, y) \frac{1}{\pi} d\lambda_2(x, y) \quad (24)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} h(x, y) \frac{1}{\pi} \mathbf{1}_D(x, y) d\lambda_2(x, y). \quad (25)$$

La deuxième égalité dans (24) est légitime parce que  $D$  s'obtient en réunissant à  $\Delta$  le segment  $[0, 1[ \times \{0\}$  qui est de  $\lambda_2$  mesure nulle.

La comparaison de (20) et (25) nous permet de conclure que la loi  $P_{(X,Y)}$  est la mesure de densité  $\frac{1}{\pi} \mathbf{1}_D$  par rapport à  $\lambda_2$ , c'est donc bien la loi uniforme sur  $D$  (noter au passage que  $\lambda_2(D) = \pi$ ).

*Remarque.*  $P_{(X,Y)}$  est aussi la loi uniforme sur le disque fermé  $\overline{D}$ , c'est d'ailleurs pour cela que l'énoncé ne précisait pas si le disque considéré était ouvert ou fermé. Il s'agit d'une propriété générale. Si  $\mu$  est la loi uniforme sur un borélien  $B$  de  $\mathbb{R}^d$ , c'est aussi la loi uniforme sur tout borélien  $B'$  qui coïncide avec  $B$ , à un ensemble de  $\lambda_d$  mesure nulle près. Il suffit d'examiner la définition (9) pour s'en convaincre.

9) L'algorithme suivant simule un vecteur aléatoire  $M'_T$  de loi uniforme sur  $B$  en combinant l'algorithme du rejet relatif à  $B_0$  et  $C_0$  avec une rotation aléatoire. On génère d'abord  $U$  de loi uniforme sur  $[0, 1]$  et on définit

$$N := \sum_{k=0}^3 k \mathbf{1}_{\{k \leq 4U < k+1\}}.$$

L'algorithme du rejet avec  $B_0$  et  $C_0$  nous fournit  $M_T$  de loi uniforme sur  $B_0$  et on prend pour  $M'_T$  l'image de  $M_T$  par la rotation de centre  $O$  et d'angle  $N\pi/2$ .

Pour  $k \in \mathbb{Z}$ , nous noterons  $\rho_k$  la rotation de centre  $O$  et d'angle  $k\pi/2$ . Les  $\rho_k$  sont des bijections mesurables et vérifient  $\rho_k^{-1} = \rho_{-k}$ . De plus  $\lambda_2$  est invariante par toute rotation.

La variable aléatoire discrète  $N$  suit la loi uniforme sur  $N(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ . En effet

$$\forall j \in \{1, 2, 3, 4\}, \quad \mathbf{P}(N = j) = \mathbf{P}(j \leq 4U < j+1) = \mathbf{P}\left(U \in \left[\frac{j}{4}, \frac{j+1}{4}\right]\right) = \frac{1}{4}. \quad (26)$$

Pour déterminer la loi de  $M'_T$ , on calcule  $\mathbf{P}(M'_T \in A)$  pour  $A$  borélien quelconque de  $\mathbb{R}^2$ . Les justifications sont exposées après le calcul.

$$\mathbf{P}(M'_T \in A) = \sum_{k=0}^3 \mathbf{P}(M'_T \in A \text{ et } N = k) \quad (27)$$

$$= \sum_{k=0}^3 \mathbf{P}(\rho_k(M_T) \in A \text{ et } N = k) \quad (28)$$

$$= \sum_{k=0}^3 \mathbf{P}(M_T \in \rho_{-k}(A)) \mathbf{P}(N = k) \quad (29)$$

$$= \sum_{k=0}^3 \frac{\lambda_2(\rho_{-k}(A) \cap B_0)}{4\lambda_2(B_0)} \quad (30)$$

$$= \sum_{k=0}^3 \frac{\lambda_2(A \cap B_k)}{\lambda_2(B)} = \frac{\lambda_2(A \cap B)}{\lambda_2(B)}. \quad (31)$$

Ceci étant vrai pour tout  $A \in \text{Bor}(\mathbb{R}^2)$ ,  $M'_T$  suit la loi uniforme sur  $B$ .

*Justifications.*

(27) : on a partitionné  $\Omega$  suivant les 4 valeurs possibles de  $N$ .

(28) : pour tout  $\omega \in \Omega$ , on a les équivalences logiques

$$\begin{aligned} M'_T(\omega) \in A \text{ et } N(\omega) = k &\Leftrightarrow M'_T(\omega) \in A \text{ et } N(\omega) = k \text{ et } M'_T(\omega) = \rho_k(M_T(\omega)) \\ &\Leftrightarrow \rho_k(M_T(\omega)) \in A \text{ et } N(\omega) = k. \end{aligned}$$

L'égalité d'évènements  $\{M'_T \in A \text{ et } N = k\} = \{\rho_k(M_T) \in A \text{ et } N = k\}$  en découle.



- (29) : indépendance de  $M_T$  et  $N$  et équivalence entre  $\rho_k(M) \in A$  et  $M \in \rho_{-k}(A)$ , car  $\rho_{-k}(\rho_k(M)) = M$ .
- (30) : par la question 5,  $M_T$  suit la loi uniforme sur  $B_0$ , on peut donc appliquer (9).  $N$  suit la loi uniforme sur  $\{0, 1, 2, 3\}$ , cf. (26).
- (31) : pour la première égalité, au numérateur on utilise l'invariance de  $\lambda_2$  par rotation qui légitime l'égalité  $\lambda_2(E) = \lambda_2(\rho_k(E))$  pour le borélien  $E = A_{-k} \cap B_0$ , où  $A_{-k} := \rho_{-k}(A)$ . De plus comme  $\rho_k$  est injective,  $\rho_k(A_{-k} \cap B_0) = \rho_k(A_{-k}) \cap \rho_k(B_0)$ . Enfin  $\rho_k(B_0) = B_k$  et  $\rho_k$  étant la rotation inverse de  $\rho_{-k}$ ,  $\rho_k(A_{-k}) = A$ . Pour le dénominateur, on remarque que  $B \setminus \{O\}$  est l'union disjointe des  $B_k \setminus \{O\}$  et que  $\lambda_2(B_k) = \lambda_2(\rho_k(B_0)) = \lambda_2(B_0)$  en raison de l'invariance de  $\lambda_2$  par rotation. On en déduit que  $\lambda_2(B) = 4\lambda_2(B_0)$ . La deuxième égalité se justifie de manière analogue en remarquant que  $A \cap B$ , privé éventuellement de  $O$  est l'union disjointe des  $A \cap B_k$  privés éventuellement de  $O$ .

10) Comparons par leur coût (au sens de la limite p.s. de  $S_n/n$ , cf. question 6) les trois algorithmes suivants pour simuler un vecteur aléatoire de loi uniforme sur  $B$  :

- Simulation de la loi uniforme sur le carré  $C = [-1, 1]^2$  circonscrit à  $B$  et algorithme du rejet avec  $B$  et  $C$ .
- Simulation de la loi uniforme sur le disque  $D$  de centre  $O$  et de rayon 1 par la méthode de la question 8 et algorithme du rejet avec  $B$  et  $\overline{D}$ . Il est clair que le disque fermé  $\overline{D}$  contient  $B$  puisque les coordonnées polaires de ses points sont caractérisées par  $0 \leq r \leq 1$  tandis que celles des points de  $B$  sont caractérisées par  $0 \leq r \leq |\cos(2t)|$ .
- La méthode mixte de la question 9.

D'après la question 6) le coût des algorithmes a) et b) est  $\tau d$  avec  $d = 2$  et  $\tau$  valant respectivement

$$\tau_a = \frac{\lambda_2([-1, 1]^2)}{\lambda_2(B)} = \frac{4}{\pi/2} = \frac{8}{\pi}, \quad \tau_b = \frac{\lambda_2(D)}{\lambda_2(B)} = \frac{\pi}{\pi/2} = 2.$$

Pour la méthode de la question 9, la génération du vecteur aléatoire  $M_{T_i}'$  consomme  $1 + 2T_i$  v.a. uniformes sur  $[0, 1]$  : une pour  $N_i$  et  $2T_i$  pour  $M_{T_i}$ . On a donc

$$S_n = n + 2 \sum_{i=1}^n T_i$$

et par la loi forte des grands nombres

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} 1 + 2 \frac{\lambda_2(C_0)}{\lambda_2(B_0)} = 1 + \frac{64}{3\pi\sqrt{6}}$$

Les algorithmes a), b), c) sont rangés par ordre décroissant de coût puisque

$$\text{coût}(a) = \frac{16}{\pi} \simeq 5,093; \quad \text{coût}(b) = 4; \quad \text{coût}(c) = 1 + \frac{64}{3\pi\sqrt{6}} \simeq 3,772.$$