Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IFP **Année 2003-04**

Corrigé du Devoir Surveillé du 28 novembre 2003

Ce corrigé est publié en version incomplète pour vous permettre de l'avoir avant les vacances. Il y manque les figures, un commentaire sur le théorème de Poincaré et la solution de la question facultative 10 du problème. Une version améliorée sera publiée ultérieurement sous forme électronique téléchargeable à l'URL
`http://math.univ-lille1.fr/~suquet/`
et sous forme imprimée dans les Annales d'IFP 2003-04.

Ex 1. *Continuité presque partout.*
Soit μ une mesure sur $\big(\mathbb{R}, \mathrm{Bor}(\mathbb{R})\big)$ vérifiant les deux conditions

$$\mu(\{0\}) = 0, \tag{1}$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad a < b \ \Rightarrow\ \mu(]a, b[) > 0. \tag{2}$$

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) := \begin{cases} \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de la fonction $x \mapsto 1/x$, continue sur $\mathbb{R}^*$, avec la fonction sinus qui est continue sur $\mathbb{R}$. Sans qu'il soit besoin d'étudier la continuité de f en zéro, on en déduit que l'ensemble D des points de discontinuité de f est *inclus* dans $\{0\}$. Par hypothèse $\mu(\{0\}) = 0$, donc $\mu(D) = 0$, ce qui signifie que f est continue μ-presque partout.
Remarque. En fait f *n'est pas* continue au point 0 parce que $f(x)$ oscille indéfiniment entre -1 et $+1$ quand x tend vers 0. Plus précisément, notons $u_k = (\pi/2 + k\pi)^{-1}$. Alors $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$ et $f(u_k) = \sin(\pi/2 + k\pi) = (-1)^k$ ne tend pas vers $f(0) = 0$, ce qui suffit pour empêcher f d'être continue au point 0.

2) Supposons qu'il existe une fonction g continue *partout* sur $\mathbb{R}$ et égale μ-presque partout à f. En notant $A := \{x \in \mathbb{R};\ f(x) \neq g(x)\}$, on a donc $\mu(A) = 0$.

Définissons les intervalles I_k par :

$$I_k := \left[\frac{1}{5\pi/6 + k\pi}, \frac{1}{\pi/6 + k\pi}\right], \quad k \in \mathbb{N}.$$

Si $x \in I_k$, $1/x$ appartient à $[\pi/6 + k\pi, 5\pi/6 + k\pi]$. Par conséquent,

a) si k est pair, $\forall x \in I_k$, $f(x) \geq 1/2$;

b) si k est impair, $\forall x \in I_k$, $f(x) \leq -1/2$.

Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, I_k a une intersection non vide avec le complémentaire de A. En effet si $A^c \cap I_k = \emptyset$, I_k est inclus dans A d'où $\mu(A) \geq \mu(I_k)$, ce qui est contradictoire avec la nullité de $\mu(A)$ puisque d'après l'hypothèse (2), $\mu(I_k)$ est strictement positif. Ainsi chaque I_k contient au moins un point de A^c, que nous noterons x_k et qui vérifie donc $f(x_k) = g(x_k)$. On voit immédiatement que $\sup I_{k+1} \leq \inf I_k$, ce qui assure la décroissance de (x_k). Comme $0 \leq x_k \leq (\pi/6 + k\pi)^{-1}$, la suite (x_k) converge vers 0. Par continuité de g au point 0, $g(x_k)$ converge vers $g(0)$ et donc $g(x_{k+1}) - g(x_k)$ converge vers 0. On aboutit ainsi à une contradiction puisque :

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \quad g(x_{2j}) - g(x_{2j-1}) \geq \frac{1}{2} - \frac{-1}{2} = 1 > 0.$$

Il n'existe donc aucune fonction g continue *partout* sur $\mathbb{R}$ et égale μ-presque partout à f.

3) *Question facultative.* On suppose que $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est borélienne et *uniformément* continue sur un borélien E de $\mathbb{R}$ tel que $\mu(\mathbb{R} \setminus E) = 0$. Montrons qu'il existe une fonction g partout continue sur $\mathbb{R}$ telle que $h(x) = g(x)$ pour tout $x \in E$.

On commence par remarquer que E est dense dans $\mathbb{R}$, par le même argument qu'à la question précédente. En effet pour tout intervalle ouvert $I =]a, b[$ (boule ouverte pour la métrique usuelle de $\mathbb{R}$), $I \cap E \neq \emptyset$ car sinon $I \subset E^c$ et $\mu(I) \leq \mu(E^c) = 0$. La fonction h étant uniformément continue sur une partie dense de l'espace métrique *complet* $\mathbb{R}$ admet un unique prolongement continu [1] $\tilde{h}$ à $\mathbb{R}$. Ainsi la fonction $g := \tilde{h}$ coïncide avec h au moins sur E. Les fonctions g et h étant boréliennes, l'ensemble $A := \{x \in \mathbb{R};\ g(x) \neq h(x)\}$ est un borélien de $\mathbb{R}$. Comme $A \subset \mathbb{R} \setminus E$, $\mu(A) = 0$. On a donc bien une fonction g continue partout sur $\mathbb{R}$ et égale à h μ-presque partout sur $\mathbb{R}$.

Remarque. Notons que la fonction $f(x) = \sin(1/x)$ *n'est pas* uniformément continue sur $E = \mathbb{R}^*$.

Ex 2. *Théorème de Poincaré.*

Le but de cet exercice est de démontrer le théorème suivant.

Théorème 1 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $f : \Omega \to \Omega$, mesurable $\mathcal{F}$-$\mathcal{F}$, qui conserve la probabilité $\mathbf{P}$: $\forall C \in \mathcal{F}$, $\mathbf{P}(f^{-1}(C)) = \mathbf{P}(C)$.*

Alors pour tout A de $\mathcal{F}$, il existe $A' \in \mathcal{F}$ et inclus dans A tel que :

a) $\mathbf{P}(A') = \mathbf{P}(A)$

b) $\forall \omega \in A'$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists p \geq n$, *tel que* $f^p(\omega) \in A$, *où* $f^p = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{p \text{ fois}}$.

Si on appelle *trajectoire* de ω la suite de ses images $(f^p(\omega))_{p \geq 1}$, on peut exprimer ceci en disant que pour presque tout ω de A, la trajectoire de ω repasse par A une infinité de fois.

[1] C'est un théorème classique d'analyse : toute fonction h *uniformément* continue sur une partie *dense* E d'un espace métrique *complet* F admet un unique prolongement $\tilde{h}$ uniformément continu à F. La clé de la preuve est le fait que l'image d'une suite de Cauchy de E par la fonction uniformément continue h est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$.

1) Vérifions les hypothèses du théorème sur l'exemple proposé par l'énoncé. On prend $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) = ([0,1], \mathrm{Bor}([0,1]), \lambda)$, où λ est la restriction de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ à la tribu borélienne de $[0,1]$. On définit $f : [0,1] \to [0,1]$ par

$$f(x) = 2x\mathbf{1}_{[0,1/2[}(x) + (2x-1)\mathbf{1}_{[1/2,1]}(x).$$

La fonction f est mesurable comme somme de deux fonctions qui sont chacune produit d'une fonction continue (donc borélienne) par l'indicatrice d'un borélien. La restriction de la mesure de Lebesgue à $\mathrm{Bor}([0,1])$ est bien une probabilité sur $([0,1], \mathrm{Bor}([0,1]))$ puisque $\lambda(\Omega) = \lambda([0,1]) = 1$. Pour vérifier la conservation de la probabilité λ par f, on commence par chercher $f^{-1}([a,b])$ pour $0 \leq a < b \leq 1$.

Chaque $y \in [0,1]$ a exactement deux antécédents par f dans $[0,1]$, l'un est $y/2$ et appartient à $[0,1/2]$, l'autre est $(1+y)/2$ et appartient à $[1/2,1]$. Ceci nous amène à écrire pour $0 \leq a < b \leq 1$,

$$\begin{aligned} f^{-1}([a,b]) &= \bigl\{x \in [0,1];\ f(x) \in [a,b]\bigr\} \\ &= \bigl\{x \in [0,1/2];\ f(x) \in [a,b]\bigr\} \cup \bigl\{x \in [1/2,1];\ f(x) \in [a,b]\bigr\} \\ &= \bigl\{y/2;\ y \in [a,b]\bigr\} \cup \bigl\{(1+y)/2;\ y \in [a,b]\bigr\} \\ &= \bigl[a/2, b/2\bigr] \cup \bigl[(1+a)/2, (1+b)/2\bigr]. \end{aligned}$$

Notons au passage que l'on retrouve la mesurabilité de f puisque $f^{-1}([a,b])$ est borélien comme réunion de deux intervalles fermés et que la tribu $\mathrm{Bor}([0,1])$ est engendrée par la famille $\mathcal{C} := \bigl\{[a,b],\ 0 \leq a, b \leq 1\bigr\}$.

De plus les intervalles $\bigl[a/2, b/2\bigr]$ et $\bigl[(1+a)/2, (1+b)/2\bigr]$ sont disjoints, sauf dans le cas particulier $a = 0$ et $b = 1$ où leur intersection est le singleton $\{1/2\}$ de mesure nulle. On a donc

$$\lambda\bigl(f^{-1}([a,b])\bigr) = \lambda\bigl([a/2,b/2]\bigr) + \lambda\bigl([(1+a)/2,(1+b)/2]\bigr) = \frac{b-a}{2} + \frac{(1+b)-(1+a)}{2} = b-a.$$

Ainsi les probabilités λ et $\lambda \circ f^{-1}$ coïncident sur la π-classe[2] $\mathcal{C}$ qui engendre la tribu $\mathrm{Bor}([0,1])$. Par le théorème d'unicité pour les mesures, elles coïncident donc sur toute la tribu borélienne de $[0,1]$. Ainsi $\lambda \circ f^{-1} = \lambda$, autrement dit f conserve la probabilité λ.

2) On introduit les ensembles

$$A_0 := \{\omega \in A;\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ f^n(\omega) \notin A\}, \quad A_1 := \{\omega \in A;\ \exists n \in \mathbb{N}^*,\ f^n(\omega) \in A\}.$$

A_0 est l'ensemble des éléments de A dont la trajectoire ne repasse jamais par A, tandis que $A_1 = A \setminus A_0$ est l'ensemble de ceux dont la trajectoire repasse au moins une fois par A. Le but de cette question est d'établir que $\mathbf{P}(A_1) = \mathbf{P}(A)$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n := (f^n)^{-1}(A_0)$.

2. a) Vérifions que A_0 et A_1 et tous les B_n sont dans $\mathcal{F}$. La mesurabilité étant préservée par la composition des applications, il est clair que f^n est mesurable. L'appartenance

[2]Rappelons qu'une π-classe est une famille stable par intersections finies, ce qui est bien le cas de $\mathcal{C}$ en notant que pour $b < a$, $[a,b] = \emptyset$.

des B_n à $\mathcal{F}$ découlera donc immédiatement de l'appartenance de A_0 à $\mathcal{F}$. D'autre part une tribu étant stable par différence ensembliste, l'appartenance de A_1 à $\mathcal{F}$ découlera de celles de A_0 et A à $\mathcal{F}$. Finalement, il ne reste plus qu'à établir que $A_0 \in \mathcal{F}$. Pour ce faire, on réécrit la définition de A_0 à l'aide d'opérations ensemblistes dénombrables sur des éléments de la tribu $\mathcal{F}$:

$$\begin{aligned} A_0 &= \{\omega \in A;\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ f^n(\omega) \notin A\} \\ &= \{\omega \in A;\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \omega \in (f^n)^{-1}(A^c)\} \\ &= A \cap \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} (f^n)^{-1}(A^c) \right). \end{aligned}$$

Comme A appartient à $\mathcal{F}$, A^c aussi et les $(f^n)^{-1}(A^c)$ sont dans $\mathcal{F}$ par mesurabilité des f^n. La tribu $\mathcal{F}$ étant stable par intersections dénombrables, l'appartenance à $\mathcal{F}$ de A_0 est établie.

2\. b) Les B_n sont deux à deux disjoints. En effet, prenons deux indices distincts dans $\mathbb{N}^*$ et notons i le plus petit, j le plus grand. On peut écrire $j = i + k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$. Soit ω un élément de $B_i \cap B_j$. Alors l'appartenance de ω à B_i signifie que $f^i(\omega) \in A_0$ et implique que $f^k(f^i(\omega))$ n'appartient pas à A et donc *a fortiori* $f^{i+k}(\omega) \notin A_0$. Mais ceci contredit l'appartenance de ω à $B_j = B_{i+k}$. Il n'existe donc aucun élément ω commun aux ensembles B_i et B_j.

2\. c) Une récurrence immédiate montre que f^n conserve la probabilité $\mathbf{P}$. Par conséquent on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(B_n) = \mathbf{P}\big((f^n)^{-1}(A_0)\big) = \mathbf{P}(A_0)$. Les B_n étant deux à deux disjoints, on a par σ-additivité de $\mathbf{P}$

$$1 \geq \mathbf{P}\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} B_n \Big) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbf{P}(B_n) \geq 0.$$

La série de terme général *constant* $\mathbf{P}(B_n) = \mathbf{P}(A_0)$ est donc convergente. Ceci ne peut se produire que si $\mathbf{P}(A_0) = 0$.

Comme $A_1 = A \setminus A_0$, on obtient finalement $\mathbf{P}(A_1) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A_0) = \mathbf{P}(A)$.

3) On définit par récurrence $A_k := \{\omega \in A_{k-1};\ \exists n \geq 1,\ f^n(\omega) \in A_{k-1}\}$ pour tout $k \geq 2$. Ainsi A_k est l'ensemble des éléments ω de A dont la trajectoire repasse au moins k fois par A. Pour $k \geq 2$, A_k est défini exactement de la même façon que A_1, à condition de remplacer A par A_{k-1} dans la définition de A_1. Le raisonnement fait à la question précédente et une récurrence immédiate nous fournissent l'appartenance de A_k à $\mathcal{F}$ et l'égalité $\mathbf{P}(A_k) = \mathbf{P}(A_{k-1})$. Ainsi pour tout $k \geq 1$, $\mathbf{P}(A_k) = \mathbf{P}(A_1) = \mathbf{P}(A)$.

Pour achever la démonstration du théorème 1, il suffit de remarquer que la suite $(A_k)_{k \geq 1}$ est décroissante pour l'inclusion. En posant $A' = \bigcap_{k \geq 1} A_k$, on a $A' \in \mathcal{F}$ et par continuité séquentielle décroissante de $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{P}(A') = \lim_{k \to +\infty} \mathbf{P}(A_k) = \mathbf{P}(A).$$

Enfin si $\omega \in A'$, sa trajectoire repasse au moins k fois dans A et ce pour chaque valeur de $k \in \mathbb{N}^*$. Autrement dit elle repasse une infinité de fois par A.

Ex 3. *Interlude*

Soit $(T, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et f une application $T \to \overline{\mathbb{R}}_+$, mesurable $\mathcal{T}$ - $\mathrm{Bor}(\overline{\mathbb{R}}_+)$. On note ν la mesure de densité f par rapport à μ, définie par :

$$\forall B \in \mathcal{T}, \quad \nu(B) = \int_B f \,\mathrm{d}\mu.$$

Montrons que si $\mu(B) = 0$, alors $\nu(B) = 0$.

Examinons d'abord le cas particulier où f est bornée sur T. Il existe donc une constante $M \in \mathbb{R}_+$ telle que $0 \leq f \leq M$. Par croissance de l'intégrale pour les fonctions mesurables positives on a alors

$$0 \leq \nu(B) = \int_B f \,\mathrm{d}\mu \leq \int_B M \,\mathrm{d}\mu = M\mu(B) = 0.$$

Pour passer au cas général, on peut utiliser la suite (f_n) des troncatures de f définies par $f_n := n\mathbf{1}_{\{f>n\}} + f\mathbf{1}_{\{f\leq n\}}$. Chaque f_n est bornée (par n) et la suite de fonctions mesurables positives (f_n) converge en croissant vers f. Par le théorème de Beppo Levi, $\int_B f_n \,\mathrm{d}\mu \uparrow \int_B f \,\mathrm{d}\mu$ et comme $\int_B f_n \,\mathrm{d}\mu = 0$ pour tout n d'après le cas particulier ci-dessus, on en déduit que $\int_B f \,\mathrm{d}\mu = 0$, d'où $\nu(B) = 0$.

Commentaire. Cet exercice était presque une question de cours et il y a plusieurs variantes à sa solution. On peut par exemple vérifier la propriété pour les indicatrices, puis les fonctions étagées et approximer f mesurable positive par une suite croissante de fonctions étagées en utilisant le théorème de Beppo Levi. Il y a d'ailleurs plus simple quand on a établi le résultat sur les fonctions étagées, c'est d'utiliser la définition de $\int_T f\mathbf{1}_B \,\mathrm{d}\mu$ comme supremum des intégrales des fonctions étagées $u \leq f\mathbf{1}_B$ qui sont donc toutes nulles. La solution la plus rapide consiste à utiliser la croissance et l'homogénéité de l'intégrale des fonctions mesurables positives ($\int_T cg \,\mathrm{d}\mu = c\int_T g \,\mathrm{d}\mu$, y compris pour la constante $c = +\infty$) en écrivant :

$$\int_B f \,\mathrm{d}\mu \leq \int_B (+\infty) \,\mathrm{d}\mu = (+\infty) \times \mu(B) = 0,$$

en raison de la convention « $(+\infty) \times 0 = 0$ ». Il convient néanmoins de remarquer que pour prouver l'homogénéité de l'intégrale dans le cas $c = +\infty$ on utilise d'une façon ou d'une autre le théorème de Beppo Levi.

Problème.

Le but du problème est l'étude de la loi de :

$$Y := \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{X_k}{4^k}, \tag{3}$$

où $(X_k)_{k\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires de Bernoulli de même paramètre $p \in]0, 1[$, définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

1) Remarquons d'abord que (3) définit bien une application $\Omega \to \mathbb{R}$. En effet pour tout $\omega \in \Omega$, la série numérique de terme général $4^{-k}X_k(\omega)$ converge dans $\mathbb{R}_+$ par comparaison avec la série géométrique de raison $1/4$, en raison de l'encadrement $0 \leq 4^{-k}X_k(\omega) \leq 4^{-k}$ (puisque $X_k(\omega)$ vaut 0 ou 1). De plus cet encadrement nous donne la majoration

$$\forall \omega \in \Omega, \quad 0 \leq Y(\omega) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{1-1/4} = \frac{1}{3}.$$

L'application Y est donc bornée sur Ω par la constante $1/3$.

Passons à la mesurabilité qui ici, s'entend relativement aux tribus $\mathcal{F}$ et $\mathrm{Bor}(\mathbb{R})$. La mesurabilité de Y découle de celle des X_k (comme variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{F})$) et de la convergence de la série (3) sur tout Ω. En effet les sommes partielles $S_n := \sum_{k=1}^{n} 4^{-k}X_k$ de cette série sont mesurables comme combinaisons linéaires de fonctions mesurables (les X_k) et Y est ainsi mesurable comme limite simple (en fait uniforme) sur Ω de la suite de fonctions mesurables $(S_n)_{n\geq 1}$.

La formule (3) définit donc une application mesurable $Y : \Omega \to \mathbb{R}$, vérifiant de plus $Y(\Omega) \subset [0, 1/3]$. Ainsi Y est une variable aléatoire positive bornée.

2) La quantité $\mathbf{E}Y$ existe toujours comme élément de $\overline{\mathbb{R}}_+$ puisque Y est une variable aléatoire positive. On est sûr qu'elle est finie puisque Y est une variable aléatoire bornée. Pour la calculer, le théorème de Beppo Levi sur l'interversion série intégrale pour les fonctions mesurables positives nous permet d'écrire :

$$\mathbf{E}Y = \mathbf{E}\left\{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{X_k}{4^k}\right\} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mathbf{E}X_k}{4^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{p}{4^k} = \frac{p}{3}.$$

3) Pour $j \in \mathbb{N}^*$ le reste d'ordre j de la série géométrique de raison $1/4$ se calcule comme suit :

$$\sum_{k>j} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{4^{j+1}} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{4^i} = \frac{1}{4^{j+1}} \times \frac{1}{1-1/4} = \frac{1}{3 \times 4^j}.$$

4) On désigne par C l'ensemble des réels $x \in [0, 1]$ tels que

$$\exists (a_k)_{k\geq 1} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}^*}, \quad x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{4^k}. \tag{4}$$

4. a) Étudions l'unicité de la décomposition (4). Pour cela on suppose que pour deux suites $(a_k)_{k\geq 1}$ et $(b_k)_{k\geq 1}$ appartenant à $\{0, 1\}^{\mathbb{N}^*}$,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{4^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b_k}{4^k}. \tag{5}$$

Définissons $j := \sup\{n \in \mathbb{N}^*;\ \forall k \leq n,\ a_k = b_k\}$. Si j vaut $+\infty$, cela signifie que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $a_k = b_k$. Par contre si j est fini, cela signifie que l'ensemble des entiers

$k \in \mathbb{N}^*$ tels que $a_k = b_k$ présente au moins un « trou » et que le premier[3] de ces trous est situé sur l'entier $j+1$. Plus formellement :

$$j < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall 1 \leq k \leq j,\ a_k = b_k \text{ et } a_{j+1} \neq b_{j+1}. \tag{6}$$

On peut supposer sans perte de généralité que $a_{j+1} = 1$ et $b_{j+1} = 0$ (quitte à permuter les notations a et b). De (5) et (6) on déduit alors

$$\frac{1}{4^{j+1}} + \sum_{k=j+2}^{+\infty} \frac{a_k}{4^k} = \sum_{k=j+2}^{+\infty} \frac{b_k}{4^k},$$

ce qui implique, en notant que $|b_k - a_k|$ ne peut valoir que 0 ou 1,

$$\frac{1}{4^{j+1}} = \sum_{k=j+2}^{+\infty} \frac{b_k - a_k}{4^k} \leq \sum_{k=j+2}^{+\infty} \frac{|b_k - a_k|}{4^k} \leq \sum_{k=j+2}^{+\infty} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{3 \times 4^{j+1}}.$$

On aboutit ainsi à une absurdité, ce qui montre que j ne peut être fini et établit l'unicité de la décomposition (4).

4. b) L'application

$$\varphi : \{0,1\}^{\mathbb{N}^*} \to C \quad (a_k)_{k\geq 1} \longmapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{4^k}$$

est clairement surjective par la définition même de C. L'unicité de la décomposition (4) montre qu'elle est injective. C'est donc une bijection de $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ sur C. Comme $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ n'est pas dénombrable, on en déduit que C ne l'est pas.

5) On se propose de montrer que $\lambda(C) = 0$. Pour cela on fixe un choix de n premiers chiffres binaires $c_1, \dots, c_n \in \{0,1\}$ et on note $C(c_1, \dots, c_n)$ le sous-ensemble de C formé des x tels que dans le développement (4), $a_i = c_i$ pour $1 \leq i \leq n$. On admet que C et les $C(c_1, \dots, c_n)$ sont des boréliens de $\mathbb{R}$.

5. a) En notant $s_n := \sum_{k=1}^{n} c_k 4^{-k}$, on voit que tout $x \in C(c_1, \dots, c_n)$ a un développement (4) de la forme

$$x = s_n + \sum_{k=n+1} \frac{a_k}{4^k},$$

où les $(a_k)_{k>n}$ sont dans $\{0,1\}$. En utilisant la question 3, on en déduit que

$$\forall x \in C(c_1, \dots, c_n), \qquad s_n \leq x \leq s_n + \frac{1}{3 \times 4^n}.$$

Par conséquent on a $C(c_1, \dots, c_n)$ est inclus dans $\left[s_n, s_n + \frac{1}{3\times 4^n}\right]$, d'où

$$\lambda\big(C(c_1, \dots, c_n)\big) \leq \lambda\Big(\Big[s_n, s_n + \frac{1}{3 \times 4^n}\Big]\Big) = \frac{1}{3 \times 4^n}.$$

[3]Rien ne permet d'affirmer que $a_k \neq b_k$ pour tout $k > j$, contrairement à ce que les correcteurs ont pu lire dans trop de copies !

Remarquons que si les bornes de l'intervalle dépendent, *via* la valeur de s_n, du choix des chiffres $c_1, \dots, c_n$, le majorant obtenu ne dépend que de n et pas du choix des n premiers chiffres. En considérant tous les choix possibles $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)$ des n premiers chiffres, on obtient pour C la décomposition

$$C = \bigcup_{\mathbf{c}\in\{0,1\}^n} C(\mathbf{c}).$$

Par sous-additivité finie de λ, on en déduit que

$$\lambda(C) \leq \sum_{\mathbf{c}\in\{0,1\}^n} \lambda\bigl(C(\mathbf{c})\bigr) \leq \operatorname{card}\left(\{0,1\}^n\right) \times \frac{1}{3\times 4^n} = \frac{2^n}{3\times 4^n} = \frac{1}{3\times 2^n}$$

5. b) L'inégalité $\lambda(C) \leq 2^{-n}$ étant vérifiée pour tout n, on obtient en faisant tendre n vers l'infini, $\lambda(C) = 0$.

6) On note P_Y la loi de Y. Puisque C est un borélien de $\mathbb{R}$, $P_Y(C)$ est bien défini et s'écrit $P_Y(C) = P\bigl(Y^{-1}(C)\bigr)$. Il est clair d'autre part que pour tout $\omega \in \Omega$, $Y(\omega)$ appartient à C. On a donc[4] $Y^{-1}(C) = \Omega$ et $P_Y(C) = 1$. D'après l'exercice 3, la mesure P_Y ne peut avoir de densité rapport à λ car s'il en était ainsi on devrait avoir $P_Y(C) = 0$ puisque $\lambda(C) = 0$.

7) On suppose dans cette question que les variables aléatoires de Bernoulli X_k sont indépendantes (et toujours de même paramètre $p \in]0,1[$). Cette indépendance se traduit par la validité des égalités

$$\mathbf{P}(X_1 = c_1, \dots, X_n = c_n) = \mathbf{P}(X_1 = c_1)\dots\mathbf{P}(X_n = c_n),$$

pour tout $n \geq 2$ et tout choix de chiffres binaires $(c_1, \dots, c_n) \in \{0,1\}^n$.

Fixons $x \in C$ et notons $x = \sum_{k\geq 1} a_k 4^{-k}$ son unique développement (4), autrement dit, $(a_k)_{k\geq 1} = \varphi^{-1}(x)$. En raison de l'unicité du développement (4), on a pour tout $n \geq 1$ l'implication

$$Y(\omega) = x \quad \Rightarrow \quad \forall 1 \leq k \leq n, \quad X_k(\omega) = a_k.$$

Cette implication se traduit par l'inclusion d'évènements

$$\{Y = x\} \subset \bigcap_{k=1}^{n} \{X_k = a_k\}.$$

Cette inclusion est vérifiée pour tout $n \geq 1$. Grâce à l'indépendance des X_k, on en déduit

$$\forall n \geq 1, \quad \mathbf{P}(Y = x) = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{P}(X_k = a_k) = p^{s(n)}(1-p)^{n-s(n)}, \tag{7}$$

[4] Attention, on a seulement $Y(\Omega) \subset C$ et il se peut que l'inclusion soit stricte. Par exemple la variable Y construite à la question 8.a) ci-dessous ne prend que deux valeurs distinctes, 0 et 1/3, donc $Y(\Omega) = \{0, 1/3\} \subsetneq C$.

où l'on a noté $s(n) := \sum_{k=1}^n a_k$ (*i.e.* $s(n)$ est le nombre de chiffres 1 dans la suite finie $a_1, \dots, a_n$). Posons $r := \max(p, 1-p)$; comme p est compris strictement entre 0 et 1, on a aussi $1 - p < 1$ et $0 < r < 1$. Revenant à (7), on obtient

$$\forall n \geq 1, \quad \mathbf{P}(Y = x) \leq r^n,$$

d'où en faisant tendre n vers l'infini

$$\mathbf{P}(Y = x) = 0.$$

Comme x était quelconque dans C, on vient d'établir l'égalité $P_Y(\{x\}) = \mathbf{P}(Y = x) = 0$ pour tout $x \in C$. Cette égalité est vérifiée aussi pour tout réel $x \notin C$ puisqu'alors $\{x\} \subset \mathbb{R} \setminus C$ et que d'après la question 6, $P_Y(\mathbb{R} \setminus C) = 1 - P_Y(C) = 1 - 1 = 0$. Finalement $\mathbf{P}(Y = x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On en déduit que la fonction de répartition F de Y est continue sur $\mathbb{R}$. On vient ainsi de construire à (relativement) peu de frais une loi de variable aléatoire P_Y ayant une f.d.r. continue et pas de densité par rapport à la mesure de Lebesgue, ce que l'on appelle une *loi singulière* (en fait toute une famille de telles lois, paramétrée par $p \in]0, 1[$).

8) Détermination de la loi de Y dans deux cas simples où les X_k sont dépendantes.

8. a) $X_k = X_1$ pour tout $k \geq 2$. Dans ce cas on voit immédiatement que :

$$Y = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{X_1}{4^k} = X_1 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{3} X_1.$$

Ainsi Y est une variable aléatoire discrète ne prenant que les deux valeurs 0 et 1/3, avec probabilités respectives $1 - p$ et p.

8. b) X_1 et X_2 sont indépendantes et pour $k \geq 3$, $X_k = X_1$ si k est impair, $X_k = X_2$ si k est pair. Là encore Y est une variable aléatoire discrète ne pouvant prendre que quatre valeurs distinctes, correspondant aux 4 valeurs possibles prises par le couple (X_1, X_2). Plus précisément on a

$$Y = X_1 \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{4^{2j+1}} + X_2 \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{4^{2j}} = \frac{1}{4} \frac{1}{1 - 1/16} X_1 + \frac{1}{16} \frac{1}{1 - 1/16} X_2 = \frac{4}{15} X_1 + \frac{1}{15} X_2.$$

En utilisant l'indépendance de X_1 et X_2, on peut décrire complètement la loi de Y par le tableau suivant.

Valeur de (X_1, X_2)	Valeur y_k de Y	$\mathbf{P}(Y = y_k)$
$(0, 0)$	0	$(1-p)^2$
$(0, 1)$	$1/15$	$(1-p)p$
$(1, 0)$	$4/15$	$p(1-p)$
$(1, 1)$	$1/3$	p^2

9) Il est *impossible* de choisir les X_k, toujours de même loi Bern(p) de sorte que pour tout $x \in C$, $\mathbf{P}(Y = x)$ soit strictement positif. En effet si $\mathbf{P}(Y = x) > 0$, la fonction

de répartition de Y présente une discontinuité au point x. Or on sait que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction de répartition est au plus dénombrable et d'après la question 4.b), l'ensemble C est infini non dénombrable.

10) *Question facultative* Montrer que C est un fermé de $\mathbb{R}$. On commencera par montrer que si x et x' sont dans C et tels que $|x - x'| < 4^{-j}$, leurs $j - 1$ premiers chiffres binaires coïncident. Utiliser ceci pour prouver que si $(x_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'éléments de C, convergente dans $\mathbb{R}$, sa limite x appartient encore à C.