Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IFP **Année 2002-03**

Examen (deuxième session), septembre 2003

Conditions de déroulement de l'épreuve :
Durée : 4 heures.
Les calculatrices sont interdites.
Liste exhaustive des documents autorisés :

1. Polycopié de DEUG *Introduction au calcul des probabilités.*
2. Polycopié du *cours* d'IFP 2002-2003.
3. Une feuille *manuscrite* recto verso format standard A4, pouvant contenir des extraits du cours à votre choix, à l'exclusion de tout corrigé d'exercice.

Le barème n'est donné qu'à titre indicatif pour vous aider à gérer votre temps et n'a pas valeur contractuelle. Les notations utilisées dans les énoncés sont celles du cours. En particulier λ_d désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ muni de sa tribu borélienne $\mathrm{Bor}(\mathbb{R}^d)$ et $\lambda = \lambda_1$.

Ex 1. *(3 points)*
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) := \sin(x^2 + y^2).$$

On note

$$D_n := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 < n\pi\big\}, \qquad I_n := \int_{D_n} f \, \mathrm{d}\lambda_2.$$

1) Calculer I_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2) f est-elle λ_2-intégrable sur $\mathbb{R}^2$?

Ex 2. *(4 points)*
Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, indépendantes et de même loi normale $\mathfrak{N}(0,1)$. On rappelle que la loi $\mathfrak{N}(0,1)$ a pour densité $g(x) = (2\pi)^{-1/2} \exp(-x^2/2)$.

1) Déterminer la densité de la loi du vecteur aléatoire (X, XY). En déduire la densité de la loi de XY sous la forme d'une intégrale (qu'on ne cherchera pas à calculer).

2) On pose

$$f(t) := \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\Big(s^2 + \frac{t^2}{s^2}\Big)\right) \frac{1}{s} \, \mathrm{d}s.$$

Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$.

3) Étudier la limite de $f(t)$ quand t tend vers 0^+.

Problème *(9 points)*

Le but de ce problème est le calcul de l'espérance d'un certain temps d'attente qui sera défini à la question 4). Les questions 1) à 3) sont des préliminaires indépendants. Toutes les variables aléatoires de l'énoncé sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \mathbb{R}^+$, on définit l'ensemble

$$A_n(r) := \big\{(x_1, \dots, x_n) \in [0,1]^n;\ x_1 + \dots + x_n < r\big\}.$$

Vérifier que pour $0 < r \leq 1$, $A_n(r)$ est l'image de $A_n(1)$ par l'homothétie de centre 0 et de rapport r et en déduire une relation simple entre $\lambda_n\big(A_n(r)\big)$ et $\lambda_n\big(A_n(1)\big)$.

2) Soit N une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\mathbf{E}N = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(N > k). \qquad (1)$$

3) Dans toute la suite, on note $(U_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[0,1]$. En utilisant la loi forte des grands nombres, montrer que

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} U_k \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} +\infty.$$

En déduire que

$$\mathbf{P}(\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n < 1) = 0. \qquad (2)$$

4) On définit la variable aléatoire[1] discrète N par

$$N(\omega) = \min\big\{n \in \mathbb{N}^*; S_n(\omega) \geq 1\big\},$$

avec la convention habituelle $\min \emptyset := +\infty$. D'après (2), $\mathbf{P}(N = +\infty) = 0$, ce qui nous autorise[2] à considérer N comme une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Justifier l'égalité d'évènements

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \{N > k\} = \{S_k < 1\}. \qquad (3)$$

Que vaut $\mathbf{P}(N > 0)$?

5) Quelle est la loi du vecteur aléatoire $(U_1, \dots, U_k)$? Vérifier que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(S_k < 1) = \lambda_k\big(A_k(1)\big) \qquad (4)$$

6) On pose pour alléger $v_k := \lambda_k\big(A_k(1)\big)$. En utilisant l'identification $\lambda_k = \lambda_{k-1} \otimes \lambda_1$ (pour tout $k \geq 2$) et la question 1), trouver une relation de récurrence pour la suite $(v_k)_{k\geq 1}$. En déduire une formule explicite pour v_k.

[1] On ne vous demande pas de justifier sa mesurabilité.

[2] Au prix d'une légère modification de l'espace probabilisé que l'on ne vous demande pas d'expliciter.

7) Calculer $\mathbf{E}N$. Calculer *ensuite* $\mathbf{P}(N=k)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

8) Peut-on utiliser la même méthode pour calculer $\mathbf{E}M$, où M est définie par

$$M(\omega) = \min\bigl\{n \in \mathbb{N}^*;\ S_n(\omega) \geq 2\bigr\}?$$

Ex 3. *Vrai ou faux ? (6 points)*

On vous demande de préciser parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies et lesquelles sont fausses. Seules les réponses argumentées seront prises en compte. Un contre-exemple est un argument suffisant pour montrer la fausseté d'une affirmation.

1) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions $\Omega \to \mathbb{R}_+$, mesurables $\mathcal{F}$-Bor$(\mathbb{R}_+)$. On suppose qu'il existe un $A \in \mathcal{F}$ tel que $\mu(A) > 0$ et que pour tout $\omega \in A$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(\omega) = +\infty$. Alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_A f_n \,\mathrm{d}\mu = +\infty.$$

2) Si le vecteur aléatoire (X, Y) de $\mathbb{R}^2$ suit la loi uniforme sur le triangle

$$T := \bigl\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq x+y \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\bigr\},$$

ses composantes X et Y sont deux variables aléatoires

a) de même loi ;

b) indépendantes.

3) Les évènements A et B de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ sont indépendants si et seulement si le vecteur aléatoire $(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B)$ a une covariance nulle.

4) Si f est une fonction $[0,1] \to \mathbb{R}$, λ-intégrable sur $[0,1]$, alors elle est μ-intégrable sur $[0,1]$ pour toute mesure finie μ définie sur $\bigl([0,1], \mathrm{Bor}([0,1])\bigr)$.