**Université des Sciences et Technologies de Lille**
**U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées**

**IFP** **Année 2002-03**

**Examen, 30 janvier 2003**

*Conditions de déroulement de l'épreuve* :
Durée : 4 heures.
Les calculatrices sont interdites.
Liste exhaustive des documents autorisés :

1. Polycopié de DEUG *Introduction au calcul des probabilités.*
2. Polycopié du *cours* d'IFP 2002-2003.
3. Une feuille *manuscrite* recto verso format standard A4, pouvant contenir des extraits du cours à votre choix, à l'exclusion de tout corrigé d'exercice.

Le barème n'est donné qu'à titre indicatif pour vous aider à gérer votre temps et n'a pas valeur contractuelle. Les notations utilisées dans les énoncés sont celles du cours. En particulier $\lambda_d$ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ muni de sa tribu borélienne $\mathrm{Bor}(\mathbb{R}^d)$.

**Ex 1.** *Loi uniforme sur la boule unité en grande dimension, la rechute (5 points).*

Dans tout l'exercice, on notera $\lambda_d$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$, $B_d(0,r)$ la boule fermée dans $\mathbb{R}^d$ de centre 0 et de rayon $r$, pour la distance associée à la norme

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{d} |x_i|, \quad x = (x_1, \dots, x_d).$$

et $v(d) := \lambda_d\big(B_d(0,1)\big)$.

1) Dans cette question, $d = 2$.

a) Dessiner $B_2(0,1)$. Calculer $v(2)$.

b) Soit $(X,Y)$ un vecteur aléatoire de loi uniforme sur $B_2(0,1)$. Sa loi est donc à densité $(x,y) \mapsto f(x,y) = c\mathbf{1}_{B_2(0,1)}(x,y)$ par rapport à $\lambda_2$ ($c$ constante à préciser). Déterminer par leur densité les lois de $X$ et $Y$.

c) Expliquer pourquoi $X$ et $Y$ ne sont pas indépendantes.

2) En utilisant une propriété de la mesure de Lebesgue, calculer $\lambda_d\big(B_d(0,r)\big)$ en fonction de $r$ et $v(d)$. On ne cherchera pas à expliciter la constante $v(d)$.

3) Soit $U : \Omega \to \mathbb{R}^d$ un vecteur aléatoire de loi uniforme sur $B_d(0,1)$. On a donc

$$\forall A \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^d), \quad \mathbf{P}(U \in A) = \frac{\lambda_d\big(A \cap B_d(0,1)\big)}{\lambda_d\big(B_d(0,1)\big)} = \frac{1}{v(d)}\lambda_d\big(A \cap B_d(0,1)\big).$$

Expliquer pourquoi $R := \|U\|_1$ est une variable aléatoire réelle et calculer sa fonction de répartition $F$.

4) On dit que le réel $m$ est *une* médiane de la variable aléatoire réelle $Y$ s'il vérifie à la fois $\mathbf{P}(Y \leq m) \geq 1/2$ et $\mathbf{P}(Y \geq m) \geq 1/2$. Montrer que $R$ a une unique médiane que l'on calculera.

5) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $U_n$ un vecteur aléatoire de loi uniforme sur $B_n(0,1)$ et $R_n := \|U_n\|_1$. Pour $0 < \varepsilon < 1$, étudier la limite de $\mathbf{P}(1-\varepsilon < R_n \leq 1)$ quand $n$ tend vers $+\infty$. Commenter le résultat obtenu.

**Ex 2.** *Caractérisation de certaines mesures par leurs moments (6 points).*

Soient $-\infty < a < b < +\infty$ fixés et $\mu$, $\nu$ deux mesures *finies* sur $\big([a,b], \mathrm{Bor}([a,b])\big)$ telles que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \int_{[a,b]} x^k \,\mathrm{d}\mu(x) = \int_{[a,b]} x^k \,\mathrm{d}\nu(x). \tag{1}$$

1) Expliquer pourquoi si $g$ est une fonction polynôme, $\int_{[a,b]} g \,\mathrm{d}\mu = \int_{[a,b]} g \,\mathrm{d}\nu$.

2) Montrer que si $(g_n)_{n\geq 1}$ est une suite de fonctions $\mu$-intégrables sur $[a,b]$ qui converge *uniformément* sur $[a,b]$ vers $f$, on a

$$\int_{[a,b]} g_n \,\mathrm{d}\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{[a,b]} f \,\mathrm{d}\mu.$$

3) On rappelle (théorème de Weierstrass) que toute fonction continue $f$ sur $[a,b]$ est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de fonctions polynômes. Utiliser ce théorème pour déduire des questions précédentes que

$$\forall f \text{ continue } [a,b] \to \mathbb{R}, \quad \int_{[a,b]} f \,\mathrm{d}\mu = \int_{[a,b]} f \,\mathrm{d}\nu. \tag{2}$$

4) En déduire que $\mu = \nu$. *Indication :* la tribu borélienne de $[a,b]$ est engendrée par la famille $\mathcal{C}$ des intervalles $[c,d]$, $a \leq c < d \leq b$. Il suffit donc de vérifier que $\forall [c,d] \in \mathcal{C}$, $\mu([c,d]) = \nu([c,d])$ (pourquoi ?). Pour vérifier cette égalité, on pourra utiliser en expliquant sa construction à l'aide d'un graphique, une suite de fonctions continues $f_n : [a,b] \to [0,1]$ telle que $f_n$ converge simplement sur $[a,b]$ vers $\mathbf{1}_{[c,d]}$.

5) Montrer que si $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires bornées telles que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{E}X^k = \mathbf{E}Y^k$, alors $X$ et $Y$ ont même loi.

**Ex 3.** *Tir à l'arc (5 points)*

On rappelle que la variable aléatoire réelle $X$ suit la loi gaussienne $\mathfrak{N}(m,\sigma)$ si sa loi a pour densité par rapport à $\lambda_1$ la fonction :

$$x \longmapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Les paramètres $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$ s'interprètent comme : $m = \mathbf{E}X$ et $\sigma^2 = \operatorname{Var} X$.

Dans un stand de tir à l'arc, un archer vise une cible placée sur une grande palissade (assimilée à un plan vertical). On munit ce plan d'un repère orthonormé de centre celui de la cible, l'axe des abscisses étant horizontal et celui des ordonnées vertical. On modélise le point d'impact de la flèche par le vecteur aléatoire gaussien $(X,Y)$ de densité par rapport à $\lambda_2$ :

$$f : (x,y) \longmapsto \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(\frac{-(x^2+y^2)}{2\sigma^2}\right).$$

Intuitivement le paramètre $\sigma$ mesure l'adresse du tireur. Pour $\varepsilon$ positif fixé, plus $\sigma$ est petit, plus grande sera la probabilité que la flèche atteigne un point à distance inférieure à $\varepsilon$ du centre.

1) Montrer sans calcul que $X$ et $Y$ sont indépendantes et de même loi que l'on précisera.

2) On se propose dans cette question de déterminer la loi du vecteur image de $(X,Y)$ par un passage en coordonnées polaires. On note $\Delta := \mathbb{R}_- \times \{0\}$ et $\varphi : \mathbb{R}^2 \setminus \Delta \to ]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[$ le passage des coordonnées cartésiennes aux coordonées polaires pour le plan privé de la demi-droite $\Delta$. C'est un $C^1$-difféomorphisme dont l'inverse $\varphi^{-1}$ est donné par :

$$\forall (r,u) \in ]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[, \quad (x,y) = \varphi^{-1}(r,u) = (r\cos u, r\sin u).$$

On note $\Omega' := \big\{\omega \in \Omega;\ \big(X(\omega),Y(\omega)\big) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Delta\big\}$. Comme $\lambda_2(\Delta) = 0$, $\mathbf{P}\big((X,Y) \in \Delta\big) = \int_\Delta f(x,y)\, \mathrm{d}\lambda_2(x,y) = 0$, d'où $\mathbf{P}(\Omega') = 1$. On pose pour tout $\omega \in \Omega'$, $\big(R(\omega), U(\omega)\big) = \varphi\big(X(\omega),Y(\omega)\big)$ et on *admet* qu'il est possible de prolonger $(R,U)$ à tout $\Omega$ de façon à en faire une application mesurable, donc un *vecteur aléatoire*. Comme $\mathbf{P}(\Omega \setminus \Omega') = 1$, la façon dont on effectue ce prolongement (pourvu qu'il soit mesurable) n'influence pas la loi de $(R,U)$. Déterminer la loi du vecteur aléatoire $(R,U)$ par sa densité. En déduire que $R$ et $U$ sont indépendantes et donner la loi de $R$ et celle de $U$.

3) Calculer $\mathbf{E}R$ et exprimer $\sigma$ en fonction de $\mathbf{E}R$. En déduire une méthode pour *estimer* $\sigma$ à partir de l'observation d'un grand nombre $n$ de tirs du même archer réalisés dans les mêmes conditions. Voici une formulation mathématique plus précise de cette question : on dispose d'une suite $(R_k)_{k\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes de même loi que $R$ et il s'agit de construire une suite $(Z_n)_{n\geq 1}$ convergeant presque sûrement vers $\sigma$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

**Ex 4.** *Vrai ou faux ? (8 points)*

On vous demande de préciser parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies et lesquelles sont fausses. Seules les réponses argumentées seront prises en compte. Un contre-exemple est un argument suffisant pour montrer la fausseté d'une affirmation.

1) Si $K$ est un compact de $\mathbb{R}^2$, $\lambda_2(K) < +\infty$.

2) Si $A$ est un borélien au plus dénombrable de $\mathbb{R}$, la mesure de Lebesgue de sa frontière est nulle.

3) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante de fonctions $\Omega \to \mathbb{R}_+$, mesurables $\mathcal{F}$-Bor$(\mathbb{R}_+)$, de limite $f$ ($f_n \uparrow f$). Alors

$$\mu(\{f_n \leq 1\}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mu(\{f \leq 1\}) \quad \text{et} \quad \mu(\{f_n < 1\}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mu(\{f < 1\}).$$

4) Si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est continue et $\lambda_1$-intégrable sur $\mathbb{R}_+$, $f(x)$ tend vers zéro quand $x$ tend vers $+\infty$.

5) Soit $f : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ une fonction décroissante. Alors $f$ a une limite finie $\ell$ en $+\infty$ et pour toute fonction $g$ $\lambda_1$-intégrable sur $[0,+\infty[$,

$$\int_{\mathbb{R}_+} f(nx)g(x)\,\mathrm{d}\lambda_1(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \int_{\mathbb{R}_+} g(x)\,\mathrm{d}\lambda_1(x).$$

6) Si $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires réelles dont les lois $P_X$ et $P_Y$ ont chacune une densité par rapport à $\lambda_1$, alors la loi de $X+Y$ a aussi une densité par rapport à $\lambda_1$.

7) Pour toute mesure *finie* $\mu$ sur l'espace mesurable $(\Omega,\mathcal{F})$ et toute application $f : \Omega \to \mathbb{R}$, mesurable $\mathcal{F}$-Bor($\mathbb{R}$), la fonction

$$F : x \mapsto F(x) := \int_\Omega \cos\bigl(xf(\omega)\bigr)\,\mathrm{d}\mu(\omega)$$

est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

8) Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in ]0,1[$ (i.e. $\mathbf{P}(X_k = 1) = p$, $\mathbf{P}(X_k = 0) = 1-p$). Alors

$$T_n := \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} +\infty.$$