Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IFP **Année 2002-03**

Devoir Surveillé, 27 novembre 2002

Conditions de déroulement de l'épreuve :
Durée : 4 heures.
Les calculatrices sont interdites.
Liste exhaustive des documents autorisés :

1. Polycopié de DEUG *Introduction au calcul des probabilités.*
2. Polycopié du *cours* d'IFP 2002-2003 (Chapitres 1 à 4, additifs et erratum compris).
3. une feuille *manuscrite* recto verso format standard A4, pouvant contenir des extraits du cours à votre choix, à l'exclusion de tout corrigé d'exercice.

Le barème n'est donné qu'à titre indicatif pour vous aider à gérer votre temps et n'a pas valeur contractuelle.

Ex 1. *(3 points).*
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire positive définie sur cet espace.

1) Montrer l'existence d'une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires *discrètes* définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ telle que $X_n(\omega)$ converge en croissant (quand n tend vers $+\infty$) vers $X(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$.

2) On note F_n et F les fonctions de répartition respectives de X_n et X. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_n(x)$ converge en décroissant vers $F(x)$.
Indication : considérer dans $\mathcal{F}$ la suite d'évènements $\big(\{X_n \leq x\}\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ex 2. *Loi uniforme sur la boule unité en grande dimension (4 points).*
Dans tout l'exercice, on notera λ_d la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$, $B_d(0, r)$ la boule fermée dans $\mathbb{R}^d$ de centre 0 et de rayon r, pour la distance associée à la norme euclidienne

$$\|x\|^2 := \sum_{i=1}^{d} x_i^2, \quad x = (x_1, \dots, x_d)$$

et $v(d) := \lambda_d\big(B_d(0, 1)\big)$. On ne cherchera pas à expliciter la constante strictement positive $v(d)$.

1) En utilisant une propriété de la mesure de Lebesgue, calculer $\lambda_d\big(B_d(0, r)\big)$ en fonction de r et $v(d)$.

2) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $U : \Omega \to \mathbb{R}^d$ un vecteur aléatoire de loi uniforme sur $B_d(0,1)$. On a donc

$$\forall A \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^d), \quad \mathbf{P}(U \in A) = \frac{\lambda_d\big(A \cap B_d(0,1)\big)}{\lambda_d\big(B_d(0,1)\big)} = \frac{1}{v(d)}\lambda_d\big(A \cap B_d(0,1)\big).$$

Expliquer pourquoi $R := \|U\|$ est une variable aléatoire réelle et calculer sa fonction de répartition F.

3) On dit que le réel m est *une* médiane de la variable aléatoire réelle Y s'il vérifie à la fois $\mathbf{P}(Y \leq m) \geq 1/2$ et $\mathbf{P}(Y \geq m) \geq 1/2$. Montrer que R a une unique médiane que l'on calculera.

4) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note U_n un vecteur aléatoire de loi uniforme sur $B_n(0,1)$ et $R_n := \|U_n\|$. Pour $0 < \varepsilon < 1$, étudier la limite de $\mathbf{P}(1 - \varepsilon < R_n \leq 1)$ quand n tend vers $+\infty$. Commenter le résultat obtenu.

Ex 3. *(4 points).*
On note λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

1) Soit $g : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, borélienne. Montrer en utilisant le théorème de transfert que :

$$\forall c > 0, \quad \int_{\mathbb{R}} g(cx)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \frac{1}{c}\int_{\mathbb{R}} g(y)\,\mathrm{d}\lambda(y).$$

2) Soit $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, λ-intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\alpha > 0$ une constante. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} |n^{-\alpha} f(nx)|\,\mathrm{d}\lambda(x) < +\infty.$$

3) En déduire que pour λ-presque tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to+\infty} n^{-\alpha} f(nx) = 0.$$

4) Construire un exemple de fonction f λ-intégrable sur $\mathbb{R}$, de la forme $f = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \mathbf{1}_{I_k}$, où les I_k sont des intervalles non réduits à un point et telle que

$$\lim_{n\to+\infty} n^{-\alpha} f(n) = +\infty.$$

Problème. *(9 points)*
On note λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Le but du problème est d'établir une inégalité entre l'intégrale de la dérivée presque partout d'une fonction croissante et la variation de cette fonction.

1) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, borélienne et λ-intégrable sur tout intervalle borné de $\mathbb{R}$. On suppose que g a une limite à droite au point a, notée $g(a+0)$. Prouver que

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{1}{h}\int_{[a,a+h]} g(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) = g(a+0).$$

Indication : les seuls ingrédients de la preuve sont la définition de la limite à droite et les propriétés élémentaires de l'intégrale.

2) Montrer que si une fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est croissante, elle est borélienne.

3) Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, croissante. Expliquer pourquoi F est λ-intégrable sur tout intervalle d'extrémités a, b, $-\infty < a < b < +\infty$.

On suppose dans toute la suite que $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est croissante, continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$. On admettra[1] *que l'ensemble D des points où F est dérivable est un borélien de $\mathbb{R}$ et que $\lambda(D^c) = 0$. On définit la fonction f par :*

$$f(x) := \begin{cases} F'(x) & \textit{si } x \in D, \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

On se propose de prouver que pour tous réels a, b $(-\infty < a < b < +\infty)$,

$$\int_{[a,b]} f \,\mathrm{d}\lambda \leq F(b) - F(a). \tag{1}$$

4) Montrer que f est borélienne positive.

5) On fixe une suite (h_n) de réels strictement positifs, convergente vers 0. Comparer les intégrales

$$\int_{[a,b]} f(x) \,\mathrm{d}\lambda(x) \quad \text{et} \quad \int_{[a,b]} \liminf_{n \to +\infty} \frac{F(x + h_n) - F(x)}{h_n} \,\mathrm{d}\lambda(x).$$

6) Justifier l'égalité $\int_{[a,b]} F(x + h) \,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_{[a+h,b+h]} F(y) \,\mathrm{d}\lambda(y)$ et l'utiliser pour montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{[a,b]} \frac{F(x + h_n) - F(x)}{h_n} \,\mathrm{d}\lambda(x) = F(b + 0) - F(a + 0).$$

7) Prouver (1).

8) Donner un exemple simple de fonction F satisfaisant les hypothèses ci-dessus et pour laquelle on peut avoir l'inégalité stricte dans (1), disons pour $a = 0$ et $b = 1$.

[1] Un théorème de Lebesgue affirme que toute fonction monotone sur $\mathbb{R}$ est dérivable λ-presque partout sur $\mathbb{R}$. La connaissance de ce théorème n'est pas utile à la solution de cet exercice.