Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IFP **Année 2002-03**

Devoir n° 4

À rendre dans la semaine du 6 janvier 2003

Ex 1. *Application du théorème de Fubini à l'interversion série-intégrale*

1) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction admettant sur I le développement en série entière *absolument* convergeant :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k.$$

On note F la fonction définie sur I par

$$F(x) := \sum_{k=0}^{+\infty} |c_k||x|^k.$$

Montrer grâce au théorème de Tonelli que pour toute fonction borélienne $g : I \to \overline{\mathbb{R}}_+$,

$$\int_I Fg \,\mathrm{d}\lambda = \sum_{k=0}^{+\infty} |c_k| \int_I |x|^k g(x) \,\mathrm{d}\lambda(x).$$

Indication : on utilisera la représentation d'une série absolument convergente comme intégrale relativement à la mesure de comptage (cf. cours, corollaire 4.7).

2) Déduire de la question précédente des conditions suffisantes pour que l'on ait :

$$\int_I fg \,\mathrm{d}\lambda = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k \int_I x^k g(x) \,\mathrm{d}\lambda(x).$$

On ne suppose plus g positive dans cette question.

3) Montrer que

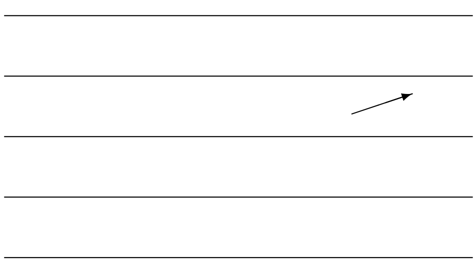
$$\int_0^1 \frac{(x\ln x)^2}{1+x^2} \,\mathrm{d}x = 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k+1)^3}.$$

4) Montrer que

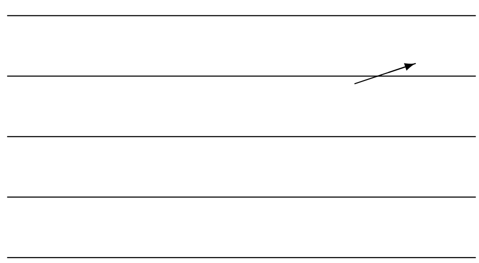
$$\forall a \in \mathbb{R}, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{\mathrm{e}^x - 1} \,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a}{k^2+a^2}.$$

Ex 2. *L'aiguille de Buffon*

En 1777, Buffon a proposé une méthode expérimentale pour obtenir une valeur numérique du nombre π. On trace sur une surface plane horizontale des droites parallèles équidistantes, séparées par une distance a (on peut par exemple utiliser les rainures d'un parquet). On laisse tomber sur cette surface une aiguille de longueur $\ell \leq a$ et une fois l'aiguille immobilisée, on observe si elle coupe l'une des droites du réseau. On répète l'expérience en notant la fréquence des intersections. Lorsque le nombre d'expériences augmente indéfiniment, cette fréquence converge selon Buffon vers $p = \frac{2\ell}{\pi a}$ permettant ainsi d'obtenir une estimation expérimentale du nombre π.



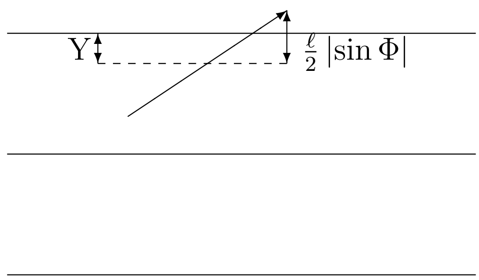
« Échec »



« Succès »

Cherchons une modélisation de cette expérience. On note Y la distance du milieu de l'aiguille à la droite du réseau la plus proche. Y prend ses valeurs dans $[0, \frac{a}{2}]$. On note Φ une mesure de l'angle entre les droites du réseau (toutes orientées dans le même sens) et l'aiguille orientée du chas vers la pointe. Φ prend ses valeurs dans $[0, 2\pi]$ (par exemple)[1].

Y et Φ sont des variables aléatoires. La connaissance du couple $(Y(\omega), \Phi(\omega))$ suffit pour savoir s'il y a ou non intersection.



Nous ferons les hypothèses suivantes sur les variables aléatoires Y et Φ :

(H_1) Y suit la loi uniforme sur $[0, \frac{a}{2}]$.

(H_2) Φ suit la loi uniforme sur $[0, 2\pi]$.

(H_3) Y et Φ sont indépendantes.

1) On note E l'événement « l'aiguille coupe l'une des droites du réseau ». Caractériser l'évènement E par une inégalité faisant intervenir les variables aléatoires Y, Φ et la constante ℓ.

2) Quelle est la densité du couple (Y, Φ), quelle est sa loi ?

[1] On pourrait aussi utiliser les angles de droites, Φ serait alors à valeurs dans un intervalle de longueur π.

3) Calculer $\mathbf{P}(E)$.

4) On considère une suite de lancers de l'aiguille et on note E_i l'évènement « lors du $i$ème lancer, l'aiguille intersecte une des droites du réseau ». On pose $X_i = \mathbf{1}_{E_i}$ et

$$F_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Que peut-on dire du comportement asymptotique de la suite (F_n) ? Déduisez en une formule d'estimation expérimentale de π.