Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

Licence de Mathématiques
IFP **Année 02-03**

Devoir 3

À rendre dans la semaine du 16 décembre 2002

Problème 1

1 - Démontrer que la fonction Γ définie sur $]0,+\infty[$ par

$$\forall x>0,\quad \Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et que pour tout entier $n\geq 1$, sa dérivée d'ordre n est donnée par

$$\forall x>0,\quad \Gamma^{(n)}(x)=\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}(\log t)^n t^{x-1}\,\lambda(\mathrm{d}t).$$

2 - Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{s-1}\mathrm{e}^{-at}\lambda(\mathrm{d}t)$, pour tous réels $a,s>0$, puis démontrer que pour tout réel $s>1$,

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^{s-1}}{\mathrm{e}^t-1}\,\lambda(\mathrm{d}t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\Gamma(s)}{n^s}\cdot$$

3 - Démontrer que pour tout entier $n\geq 0$,

$$\int_0^{+\infty} t^{2n}\mathrm{e}^{-t^2}\,\lambda(\mathrm{d}t)=\frac{1}{2}\Gamma\Big(n+\frac{1}{2}\Big)\cdot$$

4 - Démontrer que pour tout réel a :

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\cos(at)\,\lambda(\mathrm{d}t)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\exp\big(-\frac{a^2}{4}\big).$$

Problème 2

L'objet de ce problème est de démontrer que pour tout borélien B de $\mathbf{R}$ de mesure de Lebesgue finie,

$$\text{(1)}\qquad \int_B \cos^2(nx)\,\lambda(\mathrm{d}x)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{1}{2}\lambda(B),$$

puis d'appliquer ce résultat.

1 - Démontrer la propriété (1) lorsque B est un intervalle $]a, b[$, $a < b$.

2 - Étendre ensuite cette propriété au cas où B est un ouvert borné quelconque U de $\mathbf{R}$.
Indication : On pourra utiliser le théorème de topologie suivant, dû à Cantor, voir le cours, Lemme 17, premier chapitre :

> *Tout ouvert non vide U de $\mathbf{R}$ s'écrit de manière unique comme réunion d'une famille finie ou infinie dénombrable d'intervalles ouverts non vides et deux à deux disjoints, appelés composantes de U.*

3 - Pour passer au cas général d'un borélien borné quelconque B, on admettra (voir les Annales corrigées 2001-02, Devoir 2, page 5) que :

> *Soit m une mesure sur $(\mathbf{R^d}, \mathcal{B}(\mathbf{R^d}))$, $d \geq 1$, telle que la mesure de tout borélien borné soit finie. Alors pour tout borélien B et quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un fermé F_ε et un ouvert U_ε tels que $F_\varepsilon \subseteq B \subseteq U_\varepsilon$ et $m(U_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) \leq \varepsilon$*

3.bis - (pour les redoublants) Démontrer directement le résultat précédent en développant la fonction $\mathbf{1}_B$ en série de Fourier.

4 - Etendre (1) pour tout borélien B tel que $\lambda(B) < +\infty$ (un tel borélien n'est pas nécessairement borné). Indication (à justifier) :

$$\int_B \cos^2(nx)\lambda(\mathrm{d}x) = \sum_{j\in\mathbf{N}} \int_{B_j} \cos^2(nx)\lambda(\mathrm{d}x),$$

où $B_j := \{x \in B;\ j \leq |x| < j+1\}$.

4.bis - (pour les redoublants) Démontrer directement ce résultat à l'aide du théorème de Riemann-Lebesgue.

5 - Application : B désignant toujours un borélien de $\mathbf{R}$ tel que $\lambda(B) < +\infty$, soit $(a_n,\ n \geq 1)$ une suite réelle. Démontrer que si $\big(a_n \cos(n\bullet),\ n \geq 1\big)$ converge λ-presque partout sur B vers la fonction nulle et si $\lambda(B) > 0$ alors $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Indication : on raisonnera par l'absurde en supposant que

$$0 < \limsup_{n\to+\infty} a_n^2 \leq +\infty.$$