Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IFP **Année 2002-03**

Devoir n° 2

À rendre dans la semaine du 18 novembre 2002

Problème.

Le but du problème est de construire un espace probabilisé modélisant une suite infinie de tirages à pile ou face avec une pièce (éventuellement) truquée.

Rappelons que si E et F sont des ensembles, la notation F^E désigne l'ensemble des applications de E dans F. Dans le cas particulier où $E = \{1, \dots, n\}$, l'ensemble $F^{\{1,\dots,n\}}$ s'identifie à $F^n = F \times \cdots \times F$.

On représente les suites infinies de tirages à pile ou face comme les éléments de l'ensemble

$$\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}^*}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit π_n la fonction sur Ω à valeurs dans $\{0, 1\}$ définie par $\pi_n(\omega) = \omega(n)$; cette fonction représente le résultat du n-ième tirage.

Soit p un réel fixé appartenant à $]0, 1[$. On veut construire une tribu $\mathcal{F}$ sur Ω rendant les fonctions π_n mesurables, et une probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{F})$ telle que pour tout $n \geq 1$,

$$\mathsf{P}\{\pi_n = 1\} = p, \quad \mathsf{P}\{\pi_n = 0\} = 1 - p.$$

1) Soit $\mathcal{G}$ une tribu sur Ω. Montrer que π_n est $\mathcal{G}$-$\mathcal{P}(\{0, 1\})$ mesurable si et seulement si les ensembles $\{\pi_n = 1\}$ et $\{\pi_n = 0\}$ appartiennent à $\mathcal{G}$. La réunion $\bigcup_{n\geq 1} \pi_n^{-1}\big(\mathcal{P}(\{0, 1\})\big)$ est-elle une tribu ?

2) Posons $\Omega_n = \{0, 1\}^n$ et $\Omega^{(n)} = \{0, 1\}^{\mathbb{N}^* \setminus \{1,\dots,n\}}$ de sorte que $\Omega = \Omega_n \times \Omega^{(n)}$. Soit f_n la fonction de Ω dans Ω_n définie par $f_n(\omega) = \big(\pi_1(\omega), \dots, \pi_n(\omega)\big)$ et soit $\mathcal{F}_n = f_n^{-1}\big(\mathcal{P}(\Omega_n)\big)$. Montrer que :

a) $\mathcal{F}_n$ est une tribu,

b) $\mathcal{F}_n = \{A \times \Omega^{(n)}, A \subset \Omega_n\}$,

c) les fonctions $\pi_1, \dots, \pi_n$ sont $\mathcal{F}_n$-$\mathcal{P}(\{0, 1\})$ mesurables.

3) Pour tout $C \in \mathcal{F}_n$, on pose

$$\mathsf{P}_n(C) = \sum_{x \in f_n(C)} p^{|x|}(1 - p)^{n-|x|},$$

où $|x|$ désigne le nombre de coordonnées de x égales à 1 ; plus formellement, on pose $|x| = \mathrm{Card}\big\{k \in \{1, \dots, n\} : x(k) = 1\big\}$.

Montrer que P_n est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F}_n)$ et que pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\mathsf{P}_n\{\pi_k = 1\} = p.$$

4) Montrer que la suite $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ est croissante. En déduire que $\bigcup_{n\geq 1} \mathcal{F}_n$ est une semi-algèbre sur Ω que l'on notera $\mathcal{C}$ dans la suite du problème.

5) Soit P la fonction d'ensemble sur $\mathcal{C}$ définie par

$$\mathsf{P}(C) = \mathsf{P}_n(C) \text{ si } C \in \mathcal{F}_n.$$

Montrer que :

a) P est bien définie (vérifier que P_n et P_{n+1} coïncident sur $\mathcal{F}_n$),

b) P est additive sur $\mathcal{C}$,

c) $\mathsf{P}(\Omega) = 1$ et $\mathsf{P}(\emptyset) = 0$.

6) Soit $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{C}$. On veut établir que si les C_i sont tous non vides, alors

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} C_i \neq \emptyset.$$

Pour cela, on justifiera la construction suivante d'un élément $\bar{\omega}$ de Ω :

- on choisit $\bar{\omega}(1)$ dans $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} \pi_1(C_i)$,
- $\bar{\omega}(1), \ldots, \bar{\omega}(k)$ étant choisis, on choisit alors $\bar{\omega}(k+1)$ dans

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} \pi_{k+1}\Big(C_i \cap f_k^{-1}\Big(\big\{\big(\bar{\omega}(1), \ldots, \bar{\omega}(k)\big)\big\}\Big)\Big).$$

Montrer que $\bar{\omega}$ appartient à $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} C_i$.

Indication : pour C appartenant à $\mathcal{F}_n$, on a l'équivalence

$$\omega \in C \iff \big(\omega(1), \ldots, \omega(n)\big) \in f_n(C).$$

7) Montrer que si $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{C}$ tendant vers $\emptyset$, alors

$$\lim_{i\to+\infty} \mathsf{P}(C_i) = 0.$$

8) Montrer que si $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'éléments de $\mathcal{C}$ dont la réunion appartient encore à $\mathcal{C}$, alors

$$\lim_{i\to+\infty} \mathsf{P}(C_i) = \mathsf{P}(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_i).$$

9) Montrer que P est sous-σ-additive sur $\mathcal{C}$.

10) Conclure en appliquant le théorème d'extension du cours.