Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IFP **Année 2001-02**

Devoir 1
À rendre dans la semaine du 28 octobre 2002

Ex 1. *Contrôleur contre fraudeur*

Une compagnie de métro pratique les tarifs suivants. Le ticket donnant droit à un trajet coûte 1 € ; les amendes sont fixées à 20 € pour la première infraction constatée, 40 € pour la deuxième et 400 € pour la troisième. La probabilité p pour un voyageur d'être contrôlé au cours d'un trajet est supposée constante et connue de la seule compagnie. Un fraudeur décide de prendre systématiquement le métro sans payer jusqu'à la deuxième amende et d'arrêter alors de frauder. On note T le nombre de trajets effectués jusqu'à la deuxième amende (T est le numéro du trajet où le fraudeur est contrôlé pour la deuxième fois). On note $q = 1 - p$ la probabilité de faire un trajet sans contrôle.

1) Montrer que la loi de T est donnée par

$$\mathbf{P}(T = k) = (k-1)p^2q^{k-2}, \quad k \geq 2.$$

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbf{P}(T > n)$. *Indication* : on pourra commencer par chercher une formule explicite pour la somme de la série entière

$$f(x) := \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^{k-1},$$

puis pour sa dérivée terme à terme.

3) Calculer numériquement $\mathbf{P}(T > 60)$ (pourquoi s'intéresse-t-on à cette quantité ?) lorsque $p = 1/10$ et lorsque $p = 1/20$.

4) D'un point de vue purement financier (et donc hors de toute considération de moralité), quel conseil donneriez vous au fraudeur ?

Ex 2. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $p_k := P(X = k)$. On suppose que X a une espérance mathématique $\mathbf{E}X$ finie et que la suite $(p_k)_{k\geq 1}$ est *décroissante* sur $\mathbb{N}^*$.

1) Démontrer l'inégalité :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = k) < \frac{2\mathbf{E}X}{k^2}. \qquad (1)$$

Indication : Considérer la somme partielle de rang k de la série définissant $\mathbf{E}X$.

2) L'inégalité (1) reste-t-elle vraie sans l'hypothèse de décroissance de $(p_k)_{k\geq 1}$?

3) Est-il possible qu'il existe une constante $c > 0$ et un entier k_0 tels que :

$$\forall k \geq k_0, \quad P(X = k) \geq \frac{c\mathbf{E}X}{k^2}? \tag{2}$$

Ex 3. *Sommabilité...*

Soit E un espace vectoriel normé, I un ensemble infini d'indices et $\{u_i,\ i \in I\}$ une famille de vecteurs de E. Pour toute partie finie K de I on note

$$S_K := \sum_{i\in K} u_i.$$

On dit que $\{u_i,\ i \in I\}$ est *intrinsèquement sommable* et de somme $S \in E$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie $J = J_\varepsilon$ de I telle que

$$\forall K \text{ fini}, \quad J \subset K \subset I \quad \Rightarrow \quad \|S - S_K\| \leq \varepsilon.$$

L'appellation « intrinsèquement sommable » n'est pas classique et est locale à cet exercice. Elle est destinée à éviter la confusion avec la définition de la sommabilité vue en cours (pour un ensemble d'indices I *dénombrable*).

1) Montrer que si $\{u_i,\ i \in I\}$ est *intrinsèquement sommable*, l'ensemble

$$I' := \{i \in I;\ u_i \neq 0\}$$

est au plus dénombrable.

2) Montrer que si $\{u_i,\ i \in I\}$ est *intrinsèquement sommable* et si I' défini ci-dessus est infini, la série $\displaystyle\sum_{i\in I'} u_i$ est commutativement convergente, c'est-à-dire que pour toute bijection $\varphi : \mathbb{N} \to I'$, la série $\sum_{k=0}^{+\infty} u_{\varphi(k)}$ converge et sa somme ne dépend pas de φ.

3) Soit I dénombrable et supposons la série $\sum_{i\in I} u_i$ commutativement convergente et de somme S. Montrer que $\{u_i,\ i \in I\}$ est intrinsèquement sommable et de somme S. *Indication* : supposer que $\{u_i\ i \in I\}$ n'est pas intrinsèquement sommable et construire une bijection σ de $\mathbb{N} \to I$ pour laquelle la série de terme général $u_{\sigma(j)}$ ne converge pas vers S.

4) Soit $\{u_i,\ i \in I\}$ une famille infinie dans $\mathbb{R}_+$ telle que

$$M := \sup_{K \text{ fini } \subset I} \sum_{i\in K} u_i < +\infty.$$

Montrer que $\{u_i,\ i \in I\}$ est intrinsèquement sommable et de somme M.

5) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure finie. On suppose de plus que la tribu $\mathcal{F}$ possède les singletons ($\forall\omega \in \Omega$, $\{\omega\} \in \mathcal{F}$). On dit que μ a une masse ponctuelle en ω si $\mu(\{\omega\}) > 0$. Déduire de la question précédente que l'ensemble des ω où μ a une masse ponctuelle est au plus dénombrable. Généraliser au cas où μ est σ-finie.

6) Déduire de la question précédente que si F est la fonction de répartition d'une mesure finie sur $(\mathbb{R}, \mathrm{Bor}(\mathbb{R}))$, l'ensemble de ses points de sauts (*i.e.* les $a \in \mathbb{R}$ tels que $F(a^-) < F(a)$) est au plus dénombrable.