Examen (deuxième session), septembre 2003

Ex 1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) := \sin(x^2 + y^2)$. On note

$$D_n := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 < n\pi\}, \qquad I_n := \int_{D_n} f \, \mathrm{d}\lambda_2.$$

1) D_n est le disque ouvert de centre 0 et de rayon $\sqrt{n\pi}$. C'est donc un borélien borné et $\lambda_2(D_n)$ est fini. De plus la fonction continue (donc borélienne) f est bornée par 1 ($|f| \leq 1$). On en déduit immédiatement l'intégrabilité de f sur D_n par rapport à λ_2 puisque $\int_{D_n} |f| \, \mathrm{d}\lambda_2 \leq \lambda_2(D_n) < +\infty$. Ceci justifie l'existence de l'intégrale I_n.

Le passage en coordonnées polaires s'impose naturellement comme la première méthode à essayer pour le calcul de I_n. Considérons pour cela le C^1-difféomorphisme

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_+ \times \{0\} \longrightarrow]0, +\infty[\times]0, 2\pi[,$$

dont l'inverse est donné par

$$\forall (r, \theta) \in]0, +\infty[\times]0, 2\pi[, \quad \varphi^{-1}(r, \theta) = (x, y) \text{ avec } \begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta. \end{cases}$$

Rappelons le calcul du jacobien de φ^{-1} :

$$\operatorname{Jac}(\varphi^{-1})(r, \theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r.$$

Notons $\Delta_n = D_n \cap (\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_+ \times \{0\})$, autrement dit le disque D_n privé du segment horizontal $[0, \sqrt{n\pi}[\times\{0\}$. Comme ce segment a une λ_2 mesure nulle, $I_n = \int_{D_n} f \, \mathrm{d}\lambda_2 = \int_{\Delta_n} f \, \mathrm{d}\lambda_2$. L'image par φ de l'ouvert Δ_n est le rectangle ouvert $]0, \sqrt{n\pi}[\times]0, 2\pi[$. La formule générale de changement de variable par C^1-difféomorphisme nous donne donc ici :

$$I_n = \int_{\Delta_n} f(x, y) \, \mathrm{d}\lambda_2(x, y) = \int_{]0,\sqrt{n\pi}[\times]0,2\pi[} \sin(r^2) r \, \mathrm{d}\lambda_2(r, \theta).$$

L'ensemble d'intégration étant un produit cartésien, le corollaire du théorème de Fubini pour les fonctions à variables séparées (ici de la forme $f_1(r)f_2(\theta)$) nous donne

$$I_n = \int_{]0,\sqrt{n\pi}[} \sin(r^2) r \, \mathrm{d}\lambda_1(r) \int_{]0,2\pi[} \mathrm{d}\lambda_1(\theta) = 2\pi \int_0^{\sqrt{n\pi}} \sin(r^2) r \, \mathrm{d}r,$$

où le passage de l'intégrale de Lebesgue à l'intégrale de Riemann est légitime puisque la fonction $r \to \sin(r^2)r$ est continue sur $[0, n\pi]$. En effectuant dans cette dernière intégrale le changement de variable $t = r^2$, on obtient finalement :

$$I_n = \pi \int_0^{n\pi} \sin t \,\mathrm{d}t = \pi \left[-\cos t\right]_0^{n\pi} = \pi(1 - \cos n\pi) = \begin{cases} 2\pi & \text{si } n \text{ est impair,} \\ 0 & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

2) Le calcul précédent montre que la suite (I_n) *n'a pas de limite* quand n tend vers l'infini. Ceci empêche l'intégrabilité de f sur $\mathbb{R}^2$. Pour le voir raisonnons par l'absurde en supposant f λ_2-intégrable sur $\mathbb{R}^2$, ce qui implique $\int_{\mathbb{R}^2} |f| \,\mathrm{d}\lambda_2 < +\infty$. La suite de fonctions mesurables $f_n := f\mathbf{1}_{D_n}$ converge partout sur $\mathbb{R}^2$ vers f et est dominée par la fonction λ_2-intégrable $|f|$. Par le théorème de convergence dominée, on en déduit que $I_n = \int_{\mathbb{R}^2} f_n \,\mathrm{d}\lambda_2$ converge vers le réel $\int_{\mathbb{R}^2} f \,\mathrm{d}\lambda_2$, ce qui est contradictoire avec le résultat de la question précédente.

Remarque. Une adaptation immédiate du raisonnement ci-dessus montre que si (A_n) est une suite croissante de boréliens de réunion $\mathbb{R}^2$, la convergence de $\int_{A_n} f \,\mathrm{d}\lambda_2$ est *nécessaire* à la λ_2-intégrabilité de f sur $\mathbb{R}^2$. Cette convergence n'est pas *suffisante* pour l'intégrabilité de f. Pour s'en convaincre, il suffit de reprendre le calcul de la question précédente avec l'intégrale $J_n := \int_{D'_n} f \,\mathrm{d}\lambda_2$, où $D'_n = D_{2n}$ est le disque de centre 0 et de rayon $\sqrt{2n\pi}$. On voit immédiatement que $J_n = I_{2n} = 0$ pour tout n, donc que (J_n) converge. Pourtant on sait que f n'est pas λ_2-intégrable sur $\mathbb{R}^2$.

Ex 2. Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, indépendantes et de même loi normale $\mathfrak{N}(0, 1)$. Le vecteur aléatoire (X, Y) a donc pour densité $g \otimes g : (x, y) \mapsto (2\pi)^{-1} \exp(-(x^2 + y^2)/2)$, où g est la densité de la loi $\mathfrak{N}(0, 1)$.

1) Posons $(S, T) := (X, XY)$. Pour déterminer la loi de ce vecteur aléatoire, on calcule de deux façons $\mathbf{E}h(S, T) = \mathbf{E}h(X, XY)$, pour h fonction borélienne positive quelconque $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$.

Calcul par transfert $\Omega \xrightarrow{(S,T)} \mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{E}h(S, T) = \int_\Omega h\big(S(\omega), T(\omega)\big) \,\mathrm{d}\mathbf{P}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^2} h(s, t) \,\mathrm{d}P_{(S,T)}(s, t). \tag{1}$$

Calcul par transfert $\Omega \xrightarrow{(X,Y)} \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}h(S, T) &= \int_\Omega h\big(X(\omega), X(\omega)Y(\omega)\big) \,\mathrm{d}\mathbf{P}(\omega) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} h(x, xy) \,\mathrm{d}P_{(X,Y)}(x, y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} h(x, xy) \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right) \,\mathrm{d}\lambda_2(x, y). \end{aligned} \tag{2}$$

Pour la comparaison avec (1), on est amené à considérer le changement de variable (*a priori* $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, sous réserve de modification ultérieure)

$$\varphi\ : (x, y) \longmapsto (s, t) = (x, xy).$$

Pour voir s'il est bijectif, essayons d'inverser φ. Cela revient à chercher si pour (s, t) donné dans $\mathbb{R}^2$, le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & s \\ xy & = & t \end{array} \right.$$

a une solution (x, y) unique. C'est clairement le cas si $s \neq 0$ puisqu'alors le système équivaut à $x = s$ et $y = t/s$. Si $s = 0$ et $t \neq 0$, le système n'a pas de solution (la substitution de x par s dans la deuxième équation donne $0 = t$). Enfin si $s = 0$ et $t = 0$, le système a une infinité de solutions, tous les couples $(0, y)$ pour y réel quelconque. Cette discussion nous conduit à restreindre l'ensemble d'arrivée de φ à

$$D := \{(s, t) \in \mathbb{R}^2;\ s \neq 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times \mathbb{R}).$$

Tout couple $(s, t) \in D$ a un antécédent unique par φ, c'est

$$(x, y) = \varphi^{-1}(s, t) = (s, t/s).$$

Pour faire de φ une bijection, il suffit donc maintenant de restreindre son ensemble de départ à

$$\begin{array}{rcl} \varphi^{-1}(D) & = & \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \exists (s, t) \in D,\ x = s,\ y = t/s\} \\ & = & \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \exists (s, t) \in \mathbb{R}^2,\ s \neq 0,\ x = s,\ y = t/s\} \\ & = & \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \neq 0\} = D. \end{array}$$

D'autre part il est clair que D est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et que son complémentaire dans $\mathbb{R}^2$ (la « droite » $\{0\} \times \mathbb{R}$) est de λ_2 mesure nulle. En revenant à (2), on peut donc écrire

$$\mathbf{E}h(S, T) = \int_D h(x, xy) \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right) \mathrm{d}\lambda_2(x, y) \tag{3}$$

Le changement de variable $\varphi : D \to D$ est bijectif et on voit immédiatement que φ et φ^{-1} ont des dérivées partielles continues sur D. On a donc bien un C^1-difféomorphisme de l'ouvert D sur lui même. Le calcul du jacobien de φ^{-1} nous donne :

$$\mathrm{Jac}(\varphi^{-1})(s, t) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-t}{s^2} & \frac{1}{s} \end{vmatrix} = \frac{1}{s}.$$

Le changement de variable φ appliqué à l'intégrale du deuxième membre de (3) nous donne finalement :

$$\mathbf{E}h(S, T) = \int_D h(s, t) \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}\Big(s^2 + \frac{t^2}{s^2}\Big)\right) \frac{1}{|s|} \mathrm{d}\lambda_2(s, t). \tag{4}$$

Soit μ la mesure de densité F par rapport à λ_2, F étant définie par $F(s,t) := 0$ si $(s,t) \notin D$ et

$$F(s,t) := \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}\Big(s^2 + \frac{t^2}{s^2}\Big)\right) \frac{1}{|s|} \quad \text{si } (s,t) \in D.$$

La comparaison de (1) et (4) nous montre que $\int_{\mathbb{R}^2} h \, \mathrm{d}P_{(S,T)} = \int_{\mathbb{R}^2} h \, \mathrm{d}\mu$ pour toute fonction borélienne positive h, ce qui implique l'égalité de mesures $P_{(S,T)} = \mu$. Ainsi la loi du vecteur aléatoire (X, XY) est à densité F par rapport à λ_2.

On en déduit que $T = XY$ a une loi à densité F_T qui s'obtient par intégration partielle de F :

$$F_T(t) = \int_{\mathbb{R}} F(s,t) \, \mathrm{d}\lambda_1(s) = \int_{\mathbb{R}^*} \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}\Big(s^2 + \frac{t^2}{s^2}\Big)\right) \frac{1}{|s|} \, \mathrm{d}\lambda_1(s).$$

Par parité de l'intégrande ($\forall s \neq 0$, $F(s,t) = F(-s,t)$), ceci s'écrit encore

$$F_T(t) = \frac{1}{\pi} \int_{]0,+\infty[} \exp\left(-\frac{1}{2}\Big(s^2 + \frac{t^2}{s^2}\Big)\right) \frac{1}{s} \, \mathrm{d}\lambda_1(s). \tag{5}$$

2) On pose $f(t) := \int_0^{+\infty} H(s,t) \, \mathrm{d}s$, avec

$$H(s,t) := \exp\left(-\frac{1}{2}\Big(s^2 + \frac{t^2}{s^2}\Big)\right) \frac{1}{s}.$$

Pour t fixé, $\int_0^{+\infty} H(s,t) \, \mathrm{d}s$ est une intégrale de Riemann généralisée. L'intégrande $H(\,.\,,t)$ est une fonction continue positive sur $]0,+\infty[$. La convergence en $+\infty$ de $\int_0^{+\infty} H(s,t) \, \mathrm{d}s$ résulte immédiatement de la majoration (valable pour tout t réel) :

$$\forall s \in [1,+\infty[, \quad 0 \leq H(s,t) \leq \exp(-s^2/2) \tag{6}$$

et de la convergence bien connue de $\int_1^{+\infty} \exp(-s^2/2) \, \mathrm{d}s$.

Examinons la convergence en 0. Si $t = 0$, la fonction positive $s \mapsto H(s,0)$ est équivalente à $1/s$ quand s tend vers 0 ce qui entraîne la divergence de l'intégrale généralisée $\int_0^1 H(s,0) \, \mathrm{d}s$. La fonction f n'est donc pas définie au point $t = 0$. Par contre si $t \neq 0$, la majoration

$$\forall s \in]0,1], \quad 0 \leq H(s,t) \leq \exp\left(-\frac{t^2}{2s^2}\right) \frac{1}{s} \tag{7}$$

montre que $H(s,t)$ tend vers 0 quand s tend vers 0 (pour le voir poser $u = 1/s$ et noter que $u \exp(-t^2 u^2)$ tend vers 0 quand u tend vers $+\infty$). Dans ce cas on peut prolonger $H(\,.\,,t)$ par continuité à droite en 0 en posant $H(0,t) := 0$ et $\int_0^1 H(s,0) \, \mathrm{d}s$ devient une intégrale de Riemann ordinaire d'une fonction continue sur $[0,1]$, il n'y a donc aucun problème de convergence.

Finalement la seule restriction à la définition de $f(t)$ est $t \neq 0$. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$.

Remarque. Comme $f(t)$ est une intégrale généralisée absolument convergente d'une fonction continue sur $]0,+\infty[$, on peut la convertir en intégrale au sens de Lebesgue

$$\forall t \neq 0, \quad f(t) = \int_{]0,+\infty[} \exp\left(-\frac{1}{2}\Big(s^2 + \frac{t^2}{s^2}\Big)\right) \frac{1}{s}\,\mathrm{d}\lambda_1(s), \tag{8}$$

ce qui compte-tenu de (5), légitime l'égalité :

$$\forall t \neq 0, \quad F_T(t) = \frac{1}{\pi} f(t).$$

Autrement dit, πf est (une version de) la densité de XY.

Pour montrer la continuité de f sur $\mathbb{R}^*$, il suffit par parité ($f(-t) = f(t)$) de l'établir sur $]0,+\infty[$. On utilise pour cela (8) et le théorème de continuité sous le signe somme de Lebesgue. On note d'abord que pour tout $s \in]0,+\infty[$, $t \mapsto H(s,t)$ est une fonction continue sur $]0,+\infty[$. Il s'agit alors pour tout $t_0 > 0$ fixé, de trouver un voisinage $V(t_0)$ et une fonction intégrable g_0 telle que $\forall t \in V(t_0)$, $0 \leq H(s,t) \leq g_0(s)$.

En remarquant que pour s fixé, $H(s,t)$ est une fonction décroissante de t, on voit que n'importe quel intervalle de la forme $[\varepsilon,+\infty[$ avec $0 < \varepsilon < t_0$ peut convenir. Plus précisément, choisissons $V(t_0) := [t_0/2,+\infty[$ (comme $t_0 > 0$, $t_0/2$ est aussi strictement positif). On a alors

$$\forall t \in [t_0/2,+\infty[,\ \forall s \in]0,+\infty[\quad 0 \leq H(s,t) \leq H(s,t_0/2) =: g_0(s).$$

L'intégrabilité de g_0 sur $]0,+\infty[$ relativement à λ_1 résulte de la remarque ci-dessus puisque $\int_{]0,+\infty[} g_0(s)\,\mathrm{d}\lambda_1(s) = f(t_0/2)$. Le théorème de continuité sous le signe somme de Lebesgue nous permet alors d'affirmer que f est continue au point t_0. Comme t_0 était un réel positif *quelconque*, on en déduit que f est continue sur *tout l'intervalle* $]0,+\infty[$, puis sur $\mathbb{R}^*$ par parité.

3) Étudions la limite de $f(t)$ quand t tend vers 0^+. On remarque d'abord que la *décroissance* de $H(s,t)$ à s fixé passe immédiatement à f en intégrant par rapport à s l'inégalité

$$\forall s \in]0,+\infty[, \quad H(s,t) \geq H(s,t') \quad \text{pour } 0 < t \leq t'. \tag{9}$$

Il n'y a donc *a priori* que deux possibilités pour le comportement de f quand t tend vers 0^+. Ou bien f est bornée sur un voisinage de 0 et dans ce cas f aura une limite finie en 0^+, ou bien f tend vers $+\infty$ en 0^+. Nous allons montrer que c'est le deuxième cas qui est le bon. Pour cela, il suffit d'établir que si t_n est une suite décroissante dans $]0,+\infty[$, convergente vers 0, $f(t_n)$ tend vers $+\infty$ (il suffirait en fait grâce à la monotonie de f de le faire avec une suite particulière, par exemple $t_n = 1/n$). Posons $h_n := H(\,.\,,t_n)$. Les h_n sont des fonctions mesurables positives définies sur $]0,+\infty[$. En appliquant (9) avec $t = t_{n+1} \leq t_n = t'$, on obtient :

$$\forall s \in]0,+\infty[, \quad h_{n+1}(s) \geq h_n(s).$$

La suite (h_n) est donc une suite *croissante* de fonctions mesurables positives. Elle converge sur $]0,+\infty[$ vers $h : s \mapsto s^{-1}\exp(-s^2/2)$. Par le théorème de Beppo Levi,

on en déduit
$$f(t_n) = \int_{]0,+\infty[} h_n \,\mathrm{d}\lambda_1 \uparrow \int_{]0,+\infty[} h \,\mathrm{d}\lambda_1 \quad (n \to +\infty).$$
Pour vérifier que $\int_{]0,+\infty[} h \,\mathrm{d}\lambda_1 = +\infty$, il suffit d'écrire :
$$\int_{]0,+\infty[} h \,\mathrm{d}\lambda_1 \geq \int_{]0,1]} h \,\mathrm{d}\lambda_1 \geq \exp(-1/2) \int_{]0,1]} \frac{1}{s} \,\mathrm{d}\lambda_1(s)$$
et de noter que cette dernière intégrale vaut $+\infty$ car on peut la convertir en l'intégrale de Riemann généralisée divergente $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}s}{s}$. En conclusion,
$$\lim_{t \to 0^+} f(t) = +\infty.$$

Problème

1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \mathbb{R}^+$, on définit l'ensemble
$$A_n(r) := \bigl\{(x_1, \dots, x_n) \in [0,1]^n;\ x_1 + \dots + x_n < r\bigr\}.$$
Vérifions que pour $0 < r \leq 1$, $A_n(r)$ est l'image de $A_n(1)$ par l'homothétie h de centre 0 et de rapport r. Soit y un élément quelconque de $h\bigl(A_n(1)\bigr)$. Cela signifie qu'il existe $x = (x_1, \dots, x_n) \in A_n(1)$ tel que $y = rx$. Les coordonnées de x vérifient $0 \leq x_i \leq 1$ pour tout $i = 1, \dots, n$ et $x_1 + \dots + x_n < 1$. Les coordonnées y_i de y vérifient donc $0 \leq y_i = rx_i \leq r \leq 1$ et $y_1 + \dots + y_n = r(x_1 + \dots + x_n) < r$. Ainsi y appartient à $A_n(r)$ et comme y était quelconque dans $h\bigl(A_n(1)\bigr)$, ceci prouve l'inclusion
$$h\bigl(A_n(1)\bigr) \subset A_n(r). \tag{10}$$
Pour vérifier l'inclusion dans l'autre sens, soit y quelconque dans $A_n(r)$ et posons $x = \frac{1}{r}y$. Alors $y = h(x)$ et les composantes x_i de x vérifient $x_i = \frac{1}{r}y_i \geq 0$ et $x_1 + \dots + x_n = \frac{1}{r}(y_1 + \dots + y_n) < \frac{1}{r}r = 1$. De plus par positivité des composantes de x, pour tout $i = 1, \dots, n$, $0 \leq x_i \leq x_1 + \dots + x_n \leq 1$. Ceci établit l'appartenance de x à $A_n(1)$, donc celle de $y = h(x)$ à $h\bigl(A_n(1)\bigr)$. Comme y était quelconque dans $A_n(r)$, nous avons ainsi vérifié que
$$A_n(r) \subset h\bigl(A_n(1)\bigr). \tag{11}$$
Des inclusions (10) et (11) découle l'égalité
$$A_n(r) = h\bigl(A_n(1)\bigr). \tag{12}$$
On en déduit immédiatement que
$$\lambda_n\bigl(A_n(r)\bigr) = r^n \lambda_n\bigl(A_n(1)\bigr). \tag{13}$$

2) Soit N une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Pour montrer que

$$\mathbf{E}N = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(N > k), \tag{14}$$

on commence par remarquer que l'évènement $\{N > k\}$ admet la décomposition en union dénombrable d'évènements deux à deux disjoints :

$$\{N > k\} = \mathop{\cup}_{j>k} \{N = j\}.$$

Par σ-additivité de $\mathbf{P}$, on en déduit

$$\mathbf{P}(N > k) = \sum_{j>k} \mathbf{P}(N = j).$$

En reportant cette expression dans le second membre de (14) et en introduisant le facteur $\mathbf{1}_{\{j>k\}}$ de façon à pouvoir le traiter comme une série double à termes *positifs* et ainsi permuter l'ordre des sommations, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(N > k) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j>k} \mathbf{P}(N = j) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbf{P}(N = j) \mathbf{1}_{\{j>k\}} \\ &= \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbf{P}(N = j) \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{1}_{\{j>k\}}. \end{aligned} \tag{15}$$

Dans la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{1}_{\{j>k\}}$, tous les termes d'indice $k \geq j$ sont nuls. Les autres valent 1 et il y en a exactement j, indexés par $k = 0, 1, \ldots, j-1$. Cette série est donc une somme finie et vaut j. Le report de ce résultat dans (15) nous donne :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(N > k) = \sum_{j=1}^{+\infty} j \mathbf{P}(N = j) = \mathbf{E}N,$$

ce qui établit (14).

3) Soit $(U_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[0, 1]$ et $S_n := U_1 + \cdots + U_n$. Par la loi forte des grands nombres, $n^{-1}S_n$ converge presque sûrement vers $\mathbf{E}U_1 = 1/2$. Cela signifie que

$$\Omega' := \left\{ \omega \in \Omega;\ \frac{1}{n} S_n(\omega) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2} \right\}$$

est un évènement de probabilité 1. Pour tout $\omega \in \Omega'$, $S_n(\omega)$ est équivalent à $n/2$ quand n tend vers $+\infty$, donc tend vers l'infini. Ainsi la suite de variable aléatoires S_n tend vers $+\infty$ au moins sur l'évènement Ω' de probabilité 1, ce qui implique sa convergence presque sûre vers $+\infty$.

Si ω est tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n(\omega) < 1$, la suite de réels $S_n(\omega)$ ne peut tendre vers $+\infty$, ce qui interdit l'appartenance de ω à Ω'. On a donc l'inclusion d'évènements : $\{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n < 1\} \subset \Omega'^c$, d'où

$$0 \leq \mathbf{P}(\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n < 1) \leq \mathbf{P}(\Omega'^c) = 0. \tag{16}$$

4) Définissons

$$N(\omega) := \min\big\{n \in \mathbb{N}^*; S_n(\omega) \geq 1\big\},$$

avec la convention habituelle $\min \emptyset := +\infty$. D'après (16), $\mathbf{P}(N = +\infty) = 0$, ce qui nous autorise à considérer N comme une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ (voir la remarque ci-dessous pour les questions de mesurabilité).

Fixons $k \in \mathbb{N}^*$. On a les équivalences

$$N(\omega) > k \quad \Leftrightarrow \quad \forall j \leq k,\ S_j(\omega) < 1 \quad \Leftrightarrow \quad S_k(\omega) < 1.$$

La première de ces équivalences résulte de la définition de N. La deuxième utilise le fait que la suite de réels $\big(S_j(\omega)\big)_{j\geq 1}$ est croissante car les $U_i(\omega)$ sont des réels positifs. Ces équivalences établissent l'égalité d'évènements $\{N > k\} = \{S_k < 1\}$. Comme $k \in \mathbb{N}^*$ était quelconque, on en déduit :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(N > k) = \mathbf{P}(S_k < 1). \tag{17}$$

Le cas particulier de $\mathbf{P}(N > 0)$ est évident directement puisque par sa définition, $N(\omega)$ est toujours strictement positif. Donc $\mathbf{P}(N > 0) = 1$. On pourrait d'ailleurs englober ce cas dans (17) en posant $S_0 := 0$ par convention.

Remarque. Revenons sur les abus de langage suggérés et tolérés par l'énoncé. Telle qu'elle est définie, N est une application de Ω dans $\overline{\mathbb{N}}^* := \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$. Pour pouvoir parler de la « variable aléatoire » N et légitimer l'écriture $\mathbf{P}(N = +\infty)$, il faudrait donc en toute rigueur commencer par établir la *mesurabilité* de N relativement aux tribus $\mathcal{F}$ et $\mathcal{P}\big(\overline{\mathbb{N}}^*\big)$. Comme l'ensemble d'arrivée $\overline{\mathbb{N}}^*$ est dénombrable, cette mesurabilité équivaut à

$$\forall k \in \overline{\mathbb{N}}^*, \quad \{N = k\} \in \mathcal{F}. \tag{18}$$

Si $k \in \mathbb{N}^*$, cette appartenance à $\mathcal{F}$ résulte de l'égalité

$$\{N = k\} = \bigcap_{j<k} \{S_j < 1\} \cap \{S_k \geq 1\}$$

et de la mesurabilité des S_j comme sommes finies des variables aléatoires U_i. Si $k = +\infty$, on utilise encore la mesurabilité des S_j en écrivant que

$$\{N = +\infty\} = \bigcap_{j\in\mathbb{N}^*} \{S_j < 1\}$$

appartient à $\mathcal{F}$ comme intersection dénombrable d'éléments de $\mathcal{F}$. À ce stade, N est donc une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\overline{\mathbb{N}}^*$. Reste la question de sa transformation en variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Posons $\Omega'' := \{N < \infty\} = \{N = +\infty\}^c$. Par mesurabilité de N, Ω'' appartient à $\mathcal{F}$ et comme $\mathbf{P}(N = +\infty) = 0$, $\mathbf{P}(\Omega'') = 1$. La restriction de l'ensemble d'arrivée de N à $\mathbb{N}^*$ nous amène à restreindre son ensemble de départ à Ω''. Munissons alors Ω'' de la tribu $\mathcal{F}''$, trace de $\mathcal{F}$ sur Ω'', i.e. $\mathcal{F}'' := \{A \cap \Omega''; A \in \mathcal{F}\}$. Comme $\mathcal{F}''$ est incluse[1] dans $\mathcal{F}$, on munit $(\Omega'', \mathcal{F}'')$ de la mesure restriction de $\mathbf{P}$ qui reste une probabilité. En utilisant (18) et la définition de $\mathcal{F}''$, on vérifie facilement que $N : \Omega'' \to \mathbb{N}^*$ est mesurable $\mathcal{F}''$ - $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$. On a donc bien transformé N en variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et définie sur l'espace probabilisé $(\Omega'', \mathcal{F}'', \mathbf{P})$. Pour être complet, on peut remarquer que la loi de N n'est pas vraiment affectée par cette transformation. En effet dans la version originelle de $N : \Omega \to \overline{\mathbb{N}}^*$, la loi de N s'écrit

$$P_N = \sum_{k \in \overline{\mathbb{N}}^*} \mathbf{P}(N = k)\delta_k = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \mathbf{P}(N = k)\delta_k, \tag{19}$$

puisque $\mathbf{P}(N = +\infty)\delta_{+\infty}$ est la mesure nulle. Dans la version modifiée notée provisoirement $\tilde{N} : \Omega'' \to \mathbb{N}^*$, la loi de $\tilde{N}$ s'écrit aussi

$$P_{\tilde{N}} = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \mathbf{P}(N = k)\delta_k. \tag{20}$$

La différence entre P_N et $P_{\tilde{N}}$ est subtile. La première est une mesure sur la tribu $\mathcal{P}(\overline{\mathbb{N}}^*)$, la seconde sur $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$. Il résulte de (19) et (20) que $P_{\tilde{N}}$ est simplement la restriction de P_N de $\mathcal{P}(\overline{\mathbb{N}}^*)$ à $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$.

5) Les variables aléatoires U_i sont indépendantes et de même loi uniforme sur $[0, 1]$, c'est à dire à densité $f = \mathbf{1}_{[0,1]}$ par rapport à λ_1. On en déduit que la loi du vecteur aléatoire $(U_1, \dots, U_k)$ est à densité $f^{\otimes k}$ par rapport à λ_k. Comme

$$f^{\otimes k}(x_1, \dots, x_k) = \mathbf{1}_{[0,1]}(x_1) \dots \mathbf{1}_{[0,1]}(x_k) = \mathbf{1}_{[0,1]^k}(x_1, \dots, x_k),$$

la loi de $(U_1, \dots, U_k)$ est la loi uniforme sur le cube $[0, 1]^k$.

En particulier on a $\mathbf{P}\big((U_1, \dots, U_k) \in [0, 1]^k \big) = 1$. On en déduit immédiatement que

$$\mathbf{P}(S_k < 1) = \mathbf{P}\big((U_1, \dots, U_k) \in A_k(1) \big) = P_{(U_1,\dots,U_k)}\big(A_k(1)\big) = \lambda_k\big(A_k(1) \cap [0, 1]^k\big).$$

Comme $A_k(1) \subset [0, 1]^k$, on a ainsi vérifié que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(S_k < 1) = \lambda_k\big(A_k(1)\big). \tag{21}$$

6) On pose pour alléger $v_k := \lambda_k\big(A_k(1)\big)$. En utilisant l'identification $\lambda_k = \lambda_{k-1} \otimes \lambda_1$ (pour tout $k \geq 2$), on peut écrire les égalités suivantes dont la justification sera donnée

[1] Attention, ce n'est pas une *sous-tribu* de $\mathcal{F}$ car $\mathcal{F}''$ n'est pas une tribu sur Ω.

ci-après :

$$\begin{aligned}
v_k &= \int_{[0,1]^k} \mathbf{1}_{\{x_1+\cdots+x_k<1\}} \,\mathrm{d}\lambda_k(x_1,\dots,x_k) &(22)\\
&= \int_{[0,1]} \left\{ \int_{[0,1]^{k-1}} \mathbf{1}_{\{x_1+\cdots+x_{k-1}<1-x_k\}} \,\mathrm{d}\lambda_{k-1}(x_1,\dots,x_{k-1}) \right\} \mathrm{d}\lambda_1(x_k) &(23)\\
&= \int_{[0,1]} \lambda_{k-1}\big(A_{k-1}(1-x_k)\big) \,\mathrm{d}\lambda_1(x_k) &(24)\\
&= \int_{[0,1]} (1-r)^{k-1}\lambda_{k-1}\big(A_{k-1}(1)\big) \,\mathrm{d}\lambda_1(r) &(25)\\
&= v_{k-1}\int_0^1 t^{k-1}\,\mathrm{d}t. &(26)
\end{aligned}$$

Justifications.

(22) : $\lambda_k\big(A_k(1)\big) = \int_{\mathbb{R}^k} \mathbf{1}_{A_k(1)}$ et $\mathbf{1}_{A_k(1)}(x_1,\dots,x_k) = \mathbf{1}_{[0,1]^k}(x_1,\dots,x_k)\mathbf{1}_{\{x_1+\cdots+x_k<1\}}$.

(23) : on utilise l'identification $\lambda_k = \lambda_{k-1}\otimes\lambda_1$, mesure sur l'espace produit $[0,1]^k = [0,1]^{k-1}\times[0,1]$ et la définition de cette mesure produit, à savoir

$$\lambda_{k-1}\otimes\lambda_1(B) = \int_{[0,1]} \left\{ \int_{[0,1]^{k-1}} \mathbf{1}_B(x_1,\dots,x_{k-1},x_k) \,\mathrm{d}\lambda_{k-1}(x_1,\dots,x_{k-1}) \right\} \mathrm{d}\lambda_1(x_k)$$

pour tout B de la tribu produit, qui est identifiée ici avec la tribu borélienne de $[0,1]^k$.

(24) : analogue à (22), mais en sens inverse avec $k-1$ au lieu de k et $r = 1-x_k$ au lieu de $r=1$.

(25) : on a utilisé (13) avec $r = 1-x_k$.

(26) : conversion en intégrale de Riemann de l'intégrale de Lebesgue sur $[0,1]$ de la fonction continue $r\mapsto(1-r)^{k-1}$ et changement de variable $t = 1-r$.

Le calcul immédiat de l'intégrale dans (26) nous donne finalement la relation de récurrence :

$$\forall k\geq 2,\quad v_k = \frac{v_{k-1}}{k}.$$

Comme $A_1(1) = [0,1]$, le premier terme de la suite vaut $v_1 = 1$ et la récurrence se résout en

$$v_k = \frac{1}{k(k-1)\dots 2}v_1 = \frac{1}{k!}. \tag{27}$$

7) Nous pouvons maintenant calculer $\mathbf{E}N$ en exploitant (14). En effet grâce à (17), (21) et (27), on a

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad \mathbf{P}(N>k) = \frac{1}{k!}, \tag{28}$$

cette formule englobant les cas $k=0$ et $k=1$ évidents par calcul direct. En reportant dans (14), il vient

$$\mathbf{E}N = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!} = \mathrm{e}.$$

Comme sous-produit de (28), on peut expliciter les masses ponctuelles de la loi de N, puisque

$$\forall k \geq 2, \quad \mathbf{P}(N = k) = \mathbf{P}(N > k-1) - \mathbf{P}(N > k) = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} = \frac{1}{k(k-2)!}.$$

Le cas $k = 1$ est évident directement : $\mathbf{P}(N = 1) = \mathbf{P}(S_1 \geq 1) = \mathbf{P}(U_1 \geq 1) = 0$.

8) Il est bien naturel de se demander si la même méthode permet de calculer $\mathbf{E}M$, où M est définie par

$$M(\omega) = \min\big\{n \in \mathbb{N}^*;\ S_n(\omega) \geq 2\big\}.$$

La réponse est négative. On voit facilement que les résultats des questions 2) à 5) du problème restent valides (en changeant la borne 1 par la borne 2). Par contre l'argument d'homothétie qui a grandement facilité le calcul de la question 6) n'est plus valable. Pour se convaincre que les $A_n(r)$ ne sont pas les homothétiques de $A_n(2)$ pour $0 < r \leq 2$, il suffit d'examiner le cas $n = 2$, cf. figure 1.

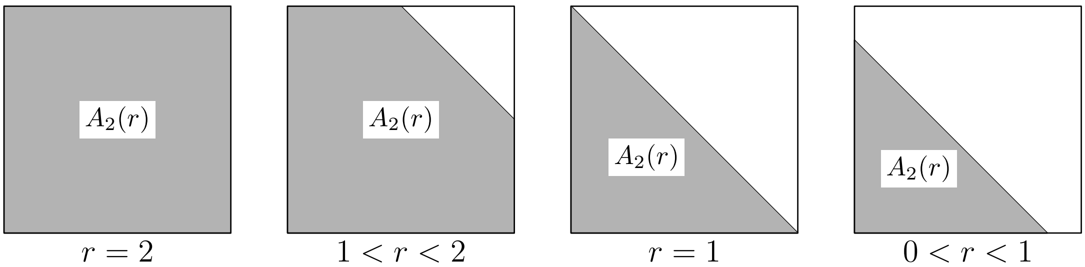

FIG. 1 – Les $A_2(r)$ ne sont pas homothétiques de $A_2(2)$

À titre d'illustration de ce problème, on présente ci-dessous les résultats d'une simulation informatique réalisée en Scilab (qui n'était évidemment pas exigible des candidats ayant passé l'épreuve de septembre). On simule 20 000 valeurs de N. En raison de la loi des grands nombres, leur moyenne arithmétique est un estimateur de $\mathbf{E}N$ dont la vraie valeur est e = 2,718 281 8... De même la fréquence d'apparition de la valeur k estime la probabilité $\mathbf{P}(N = k) = \frac{1}{k(k-2)!}$. Bien que l'ensemble des valeurs possibles de N soit infini, il n'est pas surprenant que la plus grande valeur observée lors de ces 20 000 expériences soit 8, compte tenu de la décroissance rapide de $\mathbf{P}(N = k)$ vers 0 quand k tend vers l'infini. Voici une sortie du programme à l'état brut.

```
-->;exec("/home/suquet/Enseignement/IFP/Devoirs/Devoirs03/sept2003.sce");

 nombre d'expériences

    20000.
```

```
 estimateur de l'espérance de N :

    2.71565

 loi théorique P(N=k) et loi empirique (fréquence de k)

!   1.     0.           0.      !
!   2.     0.5          0.4967  !
!   3.     0.3333333    0.33925 !
!   4.     0.125        0.12435 !
!   5.     0.0333333    0.0323  !
!   6.     0.0069444    0.00635 !
!   7.     0.0011905    0.0009  !
!   8.     0.0001736    0.00015 !
!   9.     0.0000220    0.      !
!   10.    0.0000025    0.      !

 valeur maximale observée pour N:

    8.
```

Ex 3. *Vrai ou faux ?*

1) *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *un espace mesuré et* $(f_n)_{n\geq 1}$ *une suite de fonctions* $\Omega \to \mathbb{R}_+$, *mesurables* $\mathcal{F}$-$\mathrm{Bor}(\mathbb{R}_+)$. *On suppose qu'il existe un* $A \in \mathcal{F}$ *tel que* $\mu(A) > 0$ *et que pour tout* $\omega \in A$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(\omega) = +\infty$. *Alors* $\lim_{n\to+\infty} \int_A f_n \,\mathrm{d}\mu = +\infty$.

C'est vrai. Le lemme de Fatou nous donne en effet :

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_A f_n \,\mathrm{d}\mu \geq \int_A \liminf_{n\to+\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu = (+\infty)\mu(A) = +\infty,$$

car $\mu(A) > 0$. Par conséquent $\liminf_{n\to+\infty} \int_A f_n \,\mathrm{d}\mu = +\infty$, ce qui équivaut à la convergence de $\int_A f_n \,\mathrm{d}\mu$ vers $+\infty$.

2) *Si le vecteur aléatoire* (X, Y) *de* $\mathbb{R}^2$ *suit la loi uniforme sur le triangle*

$$T := \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq x + y \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\big\},$$

ses composantes X *et* Y *sont deux variables aléatoires a) de même loi ; b) indépendantes.*

Le *a)* est vrai car la loi de (X, Y) est *symétrique*, ce qui signifie que (X, Y) et (Y, X) ont même loi donc mêmes lois marginales. Pour justifier cette symétrie, il suffit de remarquer que si Z est un vecteur aléatoire de loi uniforme sur un borélien B de $\mathbb{R}^d$ et h une transformation affine bijective de $\mathbb{R}^d$ sur $\mathbb{R}^d$, alors $h(Z)$ suit la loi uniforme sur $h(B)$ (évident par le théorème de changement de variable affine : la densité reste une fonction constante). On applique ceci avec $d = 2$, $B = T$, $Z = (X, Y)$ et $h : (x, y) \mapsto (y, x)$ en notant, c'est le point clé, que $h(T) = T$.

Le *b)* est faux, essentiellement parce que T n'est pas, même à un ensemble de mesure nulle près, un produit cartésien. De façon plus précise, nous allons vérifier que les *évènements* $\{X \geq 1/2\}$ et $\{Y \geq 1/2\}$ ne sont pas indépendants, ce qui suffit à interdire l'indépendance des *variables* aléatoires X et Y. Commençons par rappeler que puisque (X, Y) suit la loi uniforme sur T, on a pour tout borélien B de $\mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{P}\big((X, Y) \in B\big) = \frac{\lambda_2(B \cap T)}{\lambda_2(T)}. \tag{29}$$

Posons $A := \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq x + y \leq 1,\ x \geq 1/2,\ y \geq 0\big\}$ et notons A' son image par la symétrie h (figure 2).

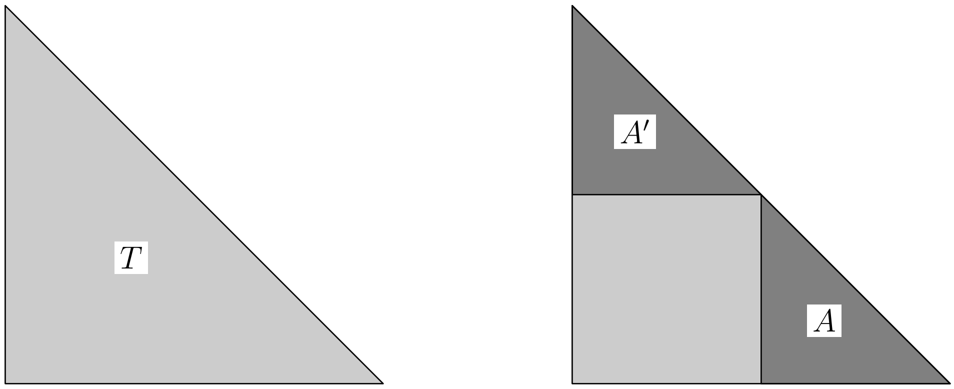

Fig. 2 –

On voit immédiatement grâce à (29) que

$$\mathbf{P}(X \geq 1/2) = \mathbf{P}\big((X, Y) \in A\big) = \frac{1}{4}$$

et par symétrie que $\mathbf{P}(Y \geq 1/2) = 1/4$. Par ailleurs,

$$\mathbf{P}(X \geq 1/2 \text{ et } Y \geq 1/2) = \mathbf{P}\big((X, Y) \in A \cap A'\big) = \frac{\lambda_2(\{(1/2, 1/2)\})}{\lambda_2(T)} = 0.$$

Par conséquent, $\mathbf{P}(X \geq 1/2 \text{ et } Y \geq 1/2) \neq \mathbf{P}(X \geq 1/2)\mathbf{P}(Y \geq 1/2)$, d'où la non-indépendance.

3) *Les évènements A et B de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ sont indépendants si et seulement si le vecteur aléatoire $(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B)$ a une covariance nulle.*

C'est vrai, grâce au calcul élémentaire suivant, valable pour n'importe quelle paire d'évènements A et B :

$$\operatorname{Cov}(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B) = \mathbf{E}(\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B) - \mathbf{E}\mathbf{1}_A\mathbf{E}\mathbf{1}_B = \mathbf{E}\mathbf{1}_{A\cap B} - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B).$$

4) *Si f est une fonction $[0,1] \to \mathbb{R}$, λ-intégrable sur $[0,1]$, alors elle est μ-intégrable sur $[0,1]$ pour toute mesure finie μ définie sur $\big([0,1], \mathrm{Bor}([0,1])\big)$.*

C'est faux. Voici un contre exemple. On prend f définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = x^{-1/2}$ si $0 < x \leq 1$. C'est une fonction mesurable positive, continue sur $]0,1]$ et l'intégrale de Riemann généralisée $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ converge, donc f est bien λ-intégrable sur $[0,1]$. Considérons maintenant la mesure finie

$$\mu := \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{k^{3/2}} \delta_{1/k}.$$

Il est clair que μ est une mesure finie puisque $\mu([0,1]) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} k^{-3/2}$ est la somme d'une série convergente. Pourtant,

$$\int_{[0,1]} f\,\mathrm{d}\mu = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{k^{3/2}} \Big(\frac{1}{k}\Big)^{-1/2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty,$$

donc f n'est pas μ intégrable.

Un contre exemple encore plus simple s'obtient avec la même f en prenant pour μ la mesure à densité f par rapport à λ.