

Corrigé de l'Examen du 30 janvier 2003

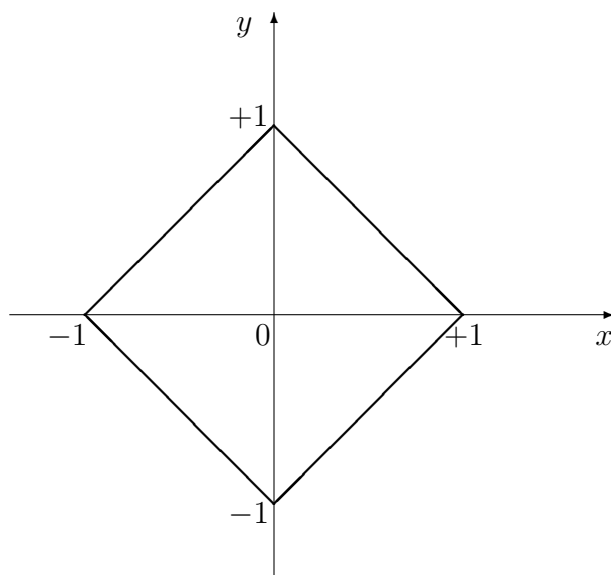
**Ex 1.** Loi uniforme sur la boule unité en grande dimension (4 points).

Dans tout l'exercice, on note  $\lambda_d$  la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^d$ ,  $B_d(0, r)$  la boule fermée de centre 0 et de rayon  $r$ , pour la distance associée à la norme

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^d |x_i|, \quad x = (x_1, \dots, x_d)$$

et  $v(d) := \lambda_d(B_d(0, 1))$ .

1) Dans cette question,  $d = 2$ . La boule unité est le carré de sommets les points  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(-1, 0)$  et  $(0, -1)$ . Le côté a pour longueur  $\sqrt{2}$  et comme la mesure de Lebesgue de  $\mathbb{R}^2$  est invariante par rotation, son aire est la même que celle d'un carré à côtés parallèles aux axes et de longueur  $\sqrt{2}$ , d'où  $\lambda_2(B_2(0, 1)) = (\sqrt{2})^2 = 2$ . On pouvait aussi le voir remarquant que les axes du repère découpent  $B_2(0, 1)$  en 4 triangles rectangles de même aire  $1/2$ .



Soit  $(X, Y)$  un vecteur aléatoire de loi uniforme sur  $B_2(0, 1)$ . Sa loi est donc à densité  $(x, y) \mapsto f(x, y) = c \mathbf{1}_{B_2(0, 1)}(x, y)$  par rapport à  $\lambda_2$ . La valeur de la constante  $c$  se détermine facilement en écrivant que

$$1 = \int_{\mathbb{R}^2} f \, d\lambda_2 = c \lambda_2(B_2(0, 1)) = cv(2) = 2c,$$

d'où  $c = 1/2$ . On sait que lorsque  $(X, Y)$  a une loi à densité par rapport à  $\lambda_2$ , ses composantes sont à densité par rapport à  $\lambda_1$  et que les densités respectives  $f_X$  et  $f_Y$  s'obtiennent par intégration partielle de  $f$ . En outre dans le cas qui nous occupe, il est clair par symétrie que  $X$  et  $Y$  ont *même loi* (car  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = f(y, x)$  et la fonction  $(x, y) \mapsto f(y, x)$  est la densité du couple  $(Y, X)$ ). Il suffit donc de calculer  $f_X$ .

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) d\lambda_1(y) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{B_2(0,1)}(x, y) d\lambda_1(y). \quad (1)$$

On remarque maintenant que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{1}_{B_2(0,1)}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| > 1, \\ 0 & \text{si } |x| \leq 1 \text{ et } |y| > 1 - |x|, \\ 1 & \text{si } |x| \leq 1 \text{ et } |y| \leq 1 - |x|. \end{cases}$$

Notons  $I_x$  l'intervalle  $[-(1 - |x|), 1 - |x|]$ , en remarquant que si  $|x| > 1$ ,  $I_x$  est l'ensemble vide<sup>1</sup>. L'égalité précédente peut alors se réécrire

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{1}_{B_2(0,1)}(x, y) = \mathbf{1}_{I_x}(y).$$

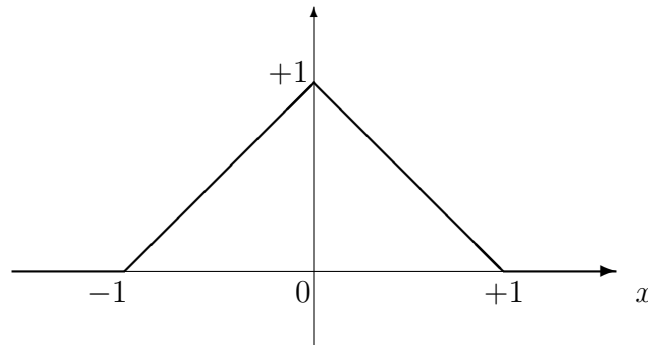
En reportant dans (1), on en déduit :

$$f_X(x) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{I_x}(y) d\lambda_1(y) = \frac{1}{2} \lambda_1(I_x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| > 1, \\ \frac{1}{2}(2 - 2|x|) & \text{si } |x| \leq 1. \end{cases}$$

D'où

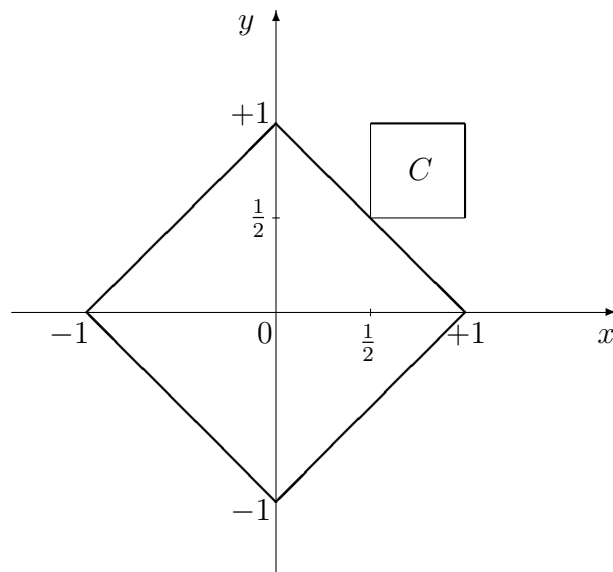
$$f_X(x) = (1 - |x|)\mathbf{1}_{[-1,1]}(x).$$

La variable aléatoire  $X$  suit donc la loi triangulaire, dont la densité a la représentation graphique suivante.



Pour voir que  $X$  et  $Y$  ne sont pas indépendantes, on montre que  $P_{(X,Y)} \neq P_X \otimes P_Y$  en comparant la masse attribuée par chacune de ces deux mesures au carré  $C = ]1/2, 1]^2$ .

<sup>1</sup>L'intervalle  $[a, b]$  est l'ensemble des  $y \in \mathbb{R}$  tels que  $a \leq y \leq b$ , cet ensemble est vide quand  $a > b$ .



Comme  $C \cap B_2(0, 1) = \emptyset$ , on a clairement  $P_{(X,Y)}(C) = 0$ . D'autre part,  $X$  et  $Y$  ayant même loi,

$$\begin{aligned}
 P_X \otimes P_Y(C) &= P_X([1/2, 1])P_Y([1/2, 1]) = (P_X([1/2, 1]))^2 \\
 &= \left\{ \int_{1/2,1} (1-x) d\lambda_1(x) \right\}^2 \\
 &= \left\{ \int_{1/2}^1 (1-x) dx \right\}^2 = \frac{1}{64}.
 \end{aligned}$$

Ainsi  $P_{(X,Y)}(C) \neq P_X \otimes P_Y(C)$ , donc  $X$  et  $Y$  ne sont pas indépendantes.

2) Les questions 2) à 5) sont exactement les mêmes que lors du D.S. de novembre. Seule la norme a changé. Mais il est clair (voir le corrigé du D.S.) que les résultats obtenus sont valables avec *n'importe quelle norme*.

**Ex 2.** *Caractérisation de certaines mesures par leurs moments.*

Soient  $-\infty < a < b < +\infty$  fixés et  $\mu, \nu$  deux mesures *finies* sur  $([a, b], \text{Bor}([a, b]))$  telles que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \int_{[a,b]} x^k d\mu(x) = \int_{[a,b]} x^k d\nu(x). \quad (2)$$

1) Remarquons d'abord que dans (2) les intégrales sont bien définies. En effet la fonction continue (donc borélienne)  $x \mapsto x^k$  est bornée sur  $[a, b]$ , donc intégrable relativement à n'importe quelle mesure finie sur  $[a, b]$ . Par linéarité de l'intégrale, on déduit immédiatement de (2) que si  $g(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n$ ,

$$\int_{[a,b]} g d\mu = \sum_{k=0}^n c_k \int_{[a,b]} x^k d\mu(x) = \sum_{k=0}^n c_k \int_{[a,b]} x^k d\nu(x) = \int_{[a,b]} g d\nu. \quad (3)$$

2) Soit  $(g_n)_{n \geq 1}$  une suite de fonctions  $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mu$ -intégrables sur  $[a, b]$  qui converge *uniformément*<sup>2</sup> sur  $[a, b]$  vers  $f$  :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon), \forall n \geq n_0, \forall x \in [a, b], |g_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \quad (4)$$

En particulier pour  $\varepsilon = 1$  et  $n_0 = n_0(1)$ , on a pour tout  $x \in [a, b]$ ,

$$|f(x)| - |g_{n_0}(x)| \leq |g_{n_0}(x) - f(x)| < 1, \quad \text{d'où} \quad |f(x)| \leq |g_{n_0}(x)| + 1.$$

De plus  $f$  étant mesurable comme limite sur  $[a, b]$  d'une suite de fonctions mesurables, on peut intégrer cette dernière inégalité sur  $[a, b]$  pour en déduire

$$\int_{[a,b]} |f| \, d\mu \leq \int_{[a,b]} (|g_{n_0}| + 1) \, d\mu = \int_{[a,b]} |g_{n_0}| \, d\mu + \mu([a, b]) < +\infty,$$

car  $g_{n_0}$  est  $\mu$ -intégrable et la mesure  $\mu$  est finie. Ainsi  $f$  est  $\mu$ -intégrable sur  $[a, b]$ . Cette intégrabilité étant acquise, on dispose pour tout  $n$  de la majoration

$$\left| \int_{[a,b]} g_n \, d\mu - \int_{[a,b]} f \, d\mu \right| = \left| \int_{[a,b]} (g_n - f) \, d\mu \right| \leq \int_{[a,b]} |g_n - f| \, d\mu,$$

laquelle combinée avec (4) nous donne<sup>3</sup>

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon), \forall n \geq n_0, \left| \int_{[a,b]} g_n \, d\mu - \int_{[a,b]} f \, d\mu \right| \leq \int_{[a,b]} \varepsilon \, d\mu = \varepsilon \mu([a, b]).$$

La constante  $\mu([a, b])$  étant finie ceci établit la convergence :

$$\int_{[a,b]} g_n \, d\mu \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{[a,b]} f \, d\mu.$$

3) Pour en déduire

$$\forall f \text{ continue } [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \int_{[a,b]} f \, d\mu = \int_{[a,b]} f \, d\nu, \quad (5)$$

fixons une fonction continue quelconque  $f$ . Par le théorème de Weierstrass,  $f$  est limite *uniforme* sur  $[a, b]$  d'une suite de fonctions polynômes  $g_n$ . Par (3) appliqué avec  $g = g_n$ , on a pour tout  $n$ , l'égalité  $\int_{[a,b]} g_n \, d\mu = \int_{[a,b]} g_n \, d\nu$ . La question 2) nous permet alors de faire tendre  $n$  vers l'infini dans cette égalité pour obtenir  $\int_{[a,b]} f \, d\mu = \int_{[a,b]} f \, d\nu$ .

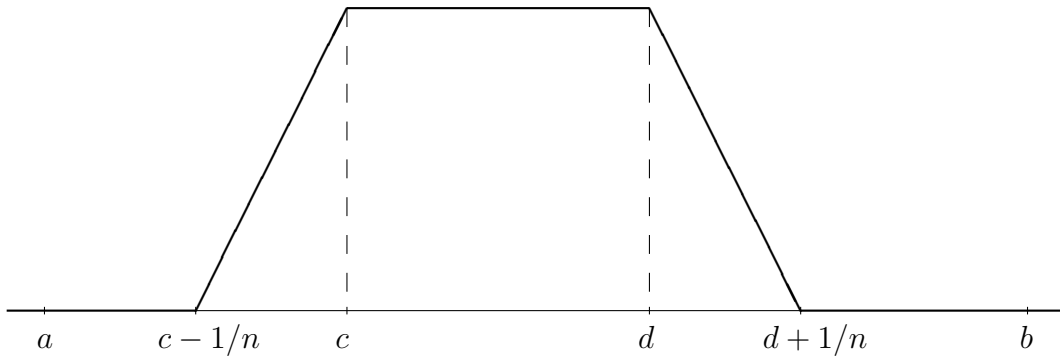
---

<sup>2</sup>L'énoncé ne précise pas si les  $g_n$  sont à valeurs dans  $\mathbb{R}$ ,  $\overline{\mathbb{R}}$  ou  $\mathbb{C}$ . La démonstration qui suit est correcte pour les fonctions à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Nous excluons les fonctions à valeurs dans  $\overline{\mathbb{R}}$  pour pouvoir écrire la convergence uniforme à l'aide de  $g_n - f$  sans risquer de tomber sur l'écriture prohibée «  $\infty - \infty$  ». La convergence uniforme de  $g_n$  vers  $f$  lorsque ces fonctions sont à valeurs dans  $\overline{\mathbb{R}}$  devrait s'écrire à l'aide d'une distance métrisant la topologie de  $\overline{\mathbb{R}}$  au lieu de la distance usuelle de  $\mathbb{R}$ ,  $d(x, y) = |x - y|$ . Il n'y a de toutes façons pas d'inconvénient à écarter  $\overline{\mathbb{R}}$  comme ensemble d'arrivée puisque le résultat de cette question sera appliqué à la question suivante avec  $f$  continue sur  $[a, b]$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et  $g_n$  fonction polynôme.

<sup>3</sup>Notons que dans (4),  $n_0$  ne dépend pas de  $x$ , ce qui permet de réécrire (4) sous la forme fonctionnelle :  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon), \forall n \geq n_0, |g_n - f| < \varepsilon$ .

4) Pour en déduire que  $\mu = \nu$ , on rappelle d'abord que la tribu borélienne de  $[a, b]$  est engendrée par le  $\pi$ -système  $\mathcal{C}$  des intervalles  $[c, d]$ ,  $a \leq c < d \leq b$ . Par le théorème d'unicité des mesures, il suffit donc de vérifier que  $\forall [c, d] \in \mathcal{C}$ ,  $\mu([c, d]) = \nu([c, d])$ . Pour cela, fixons un intervalle  $[c, d] \in \mathcal{C}$  quelconque et admettons un instant que l'on dispose d'une suite  $(f_n)_{n \geq n_0}$  de fonctions continues  $[a, b] \rightarrow [0, 1]$ , qui converge ponctuellement vers  $\mathbf{1}_{[c, d]}$ . Par (5) appliqué à la fonction continue  $f_n$ , on a pour tout  $n \geq n_0$ ,  $\int_{[a, b]} f_n d\mu = \int_{[a, b]} f_n d\nu$ . Comme  $0 \leq f_n \leq 1$  et  $\mu, \nu$  sont des mesures finies, le théorème de convergence dominée nous permet de faire tendre  $n$  vers l'infini dans cette égalité pour obtenir  $\int_{[a, b]} \mathbf{1}_{[c, d]} d\mu = \int_{[a, b]} \mathbf{1}_{[c, d]} d\nu$ , autrement dit,  $\mu([c, d]) = \nu([c, d])$ . Pour compléter la preuve, il ne nous reste donc plus qu'à construire la suite  $f_n$  ayant les propriétés requises.

Nous détaillerons cette construction dans le cas  $a < c < d < b$ , les autres configurations ( $c = a$  ou  $d = b$ ) s'en déduisant par une adaptation facile. On prend d'abord  $n_0$  assez grand pour que  $a \leq c - 1/n_0$  et  $d + 1/n_0 \leq b$ . Pour  $n \geq n_0$ , on définit  $f_n$  comme la fonction continue  $[a, b] \rightarrow [0, 1]$ , nulle hors de  $]c - 1/n, d + 1/n[$ , valant 1 sur  $[c, d]$  et affine sur chacun des intervalles  $[c - 1/n, c]$  et  $[d, d + 1/n]$ .



Par construction on a bien  $f_n$  continue et  $0 \leq f_n \leq 1$ . Vérifions la convergence ponctuelle de  $f_n$  vers  $\mathbf{1}_{[c, d]}$ . Si  $x \in [a, b] \setminus [c, d]$ , à partir d'un rang  $n_1 = n_1(x)$  assez grand,  $x$  est extérieur à  $]c - 1/n, d + 1/n[$  et donc  $f_n(x) = 0$ , pour tout  $n \geq n_1$ . Dans ce cas, la limite de  $f_n(x)$  est 0. Si  $x \in [c, d]$ ,  $f_n(x) = 1$  pour tout  $n \geq n_0$  et donc la limite de  $f_n(x)$  est 1. On a donc bien pour tout  $x \in [a, b]$ , convergence de  $f_n(x)$  vers  $\mathbf{1}_{[c, d]}(x)$ .

Dans le cas particulier  $c = a$  et  $d < b$ , on prend  $f_n$  égale à 1 sur  $[a, d]$ , nulle en dehors de  $[a, d + 1/n[$  et affine sur  $[d, d + 1/n[$ . Graphiquement, on remplace le trapèze isocèle dessiné par le graphe de  $f_n$  dans le cas précédent par un trapèze rectangle. Dans le cas  $a < c < d = b$ , on fait de même. Enfin le cas  $a = c$  et  $d = b$  est trivial, il suffit de prendre pour  $f_n$  la fonction constante égale à 1 sur  $[a, b]$ .

5) Montrons que si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires bornées telles que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbf{E}X^k = \mathbf{E}Y^k$ , elles ont même loi. Nous allons en fait généraliser un peu

la question et montrer le résultat pour deux v.a. bornées presque-sûrement. Dire que  $X$  est p.s. bornée signifie qu'il existe deux constantes réelles  $a' < b'$  telles que  $\mathbf{P}(X \in [a', b']) = 1$ . De même pour  $Y$  avec des constantes  $a''$  et  $b''$ . En posant  $a := \min(a', a'')$  et  $b := \max(b', b'')$ , on a clairement :

$$\mathbf{P}(X \in [a, b]) = 1 \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(Y \in [a, b]) = 1.$$

Il en résulte immédiatement que

$$\forall B \in \text{Bor}(\mathbb{R}) \text{ tel que } B \subset \mathbb{R} \setminus [a, b], \quad P_X(B) = 0 = P_Y(B), \quad (6)$$

$$\forall B \in \text{Bor}(\mathbb{R}) \text{ tel que } B \supset [a, b], \quad P_X(B) = 1 = P_Y(B). \quad (7)$$

Comme  $X$  et  $Y$  sont p.s. bornées, elles ont des moments de tout ordre. En appliquant le théorème de transfert, on peut exprimer  $\mathbf{E}X^k$  à l'aide de la loi  $P_X$  de  $X$  :

$$\mathbf{E}X^k = \int_{\Omega} X(\omega)^k d\mathbf{P}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} x^k dP_X(x) = \int_{[a,b]} x^k dP_X(x) + \int_{\mathbb{R} \setminus [a,b]} x^k dP_X(x).$$

Cette dernière intégrale est nulle puisque  $P_X(\mathbb{R} \setminus [a, b]) = 0$ . En appliquant le même argument à  $\mathbf{E}Y^k$ , nous pouvons traduire l'hypothèse par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \int_{[a,b]} x^k dP_X(x) = \int_{[a,b]} y^k dP_Y(y).$$

Par la question 4), on en déduit que les mesures finies  $P_X$  et  $P_Y$  coïncident sur tout intervalle  $[c, d] \subset [a, b]$ . Il est alors facile de voir que  $P_X$  et  $P_Y$  ont même fonction de répartition. En effet, la f.d.r.  $F_X$  de  $P_X$  est donnée par  $F_X(x) = P_X(]-\infty, x])$ . On voit alors immédiatement en utilisant (6) et (7) que :

1. si  $x < a$ ,  $]-\infty, x] \subset \mathbb{R} \setminus [a, b]$ , d'où  $P_X(]-\infty, x]) = 0$ ;
2. si  $a \leq x \leq b$ ,  $P_X(]-\infty, x]) = P_X(]-\infty, a]) + P_X([a, x]) = P_X([a, x])$  car  $]-\infty, a[ \subset \mathbb{R} \setminus [a, b]$ ;
3. si  $x > b$ ,  $]-\infty, x] \supset [a, b]$ , donc  $P_X(]-\infty, x]) = 1$ .

On a exactement le même calcul avec  $P_Y$  à la place de  $P_X$ . Ceci nous permet d'écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ P_X([a, x]) & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases} \quad F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ P_Y([a, x]) & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$$

Quand  $a \leq x \leq b$ ,  $[a, x]$  est un intervalle fermé inclus dans  $[a, b]$ , donc  $P_X([a, x]) = P_Y([a, x])$ . On voit ainsi que  $F_X(x) = F_Y(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Ainsi les lois  $P_X$  et  $P_Y$  ont même fonction de répartition, elles sont donc égales.

**Ex 3.** *Tir à l'arc*

On modélise le point d'impact de la flèche par le vecteur aléatoire gaussien  $(X, Y)$  de densité par rapport à  $\lambda_2$  :

$$f : (x, y) \mapsto \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(\frac{-(x^2 + y^2)}{2\sigma^2}\right).$$

1) La densité  $f$  du vecteur aléatoire  $(X, Y)$  peut s'écrire aussi, grâce aux propriétés de la fonction exponentielle :

$$f(x, y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right) \times \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-y^2}{2\sigma^2}\right) = g(x)g(y),$$

où  $g$  est la densité de la loi  $\mathfrak{N}(0, 1)$ . Autrement dit  $f = g \otimes g$ . On sait alors que les composantes du vecteur aléatoire sont indépendantes et que la loi de  $X$  a pour densité  $g$  et celle de  $Y$  aussi, cf. proposition 5.42 du cours<sup>4</sup>.

2) Pour déterminer la loi du vecteur aléatoire  $(R, U)$ , on calcule de deux façons  $\mathbf{E}h(R, U)$  pour  $h$  borélienne positive quelconque.

*Première façon* : on utilise le transfert  $\Omega' \xrightarrow{(R,U)} \mathbb{R}^2$ .

$$\mathbf{E}h(R, U) = \int_{\Omega} h(R, U) d\mathbf{P} = \int_{\Omega'} h(R, U) d\mathbf{P} = \int_{\mathbb{R}^2} h(r, u) dP_{R,U}(r, u), \quad (8)$$

où l'on a noté  $P_{R,U}$  la loi du couple  $(R, U)$ .

*Deuxième façon* : comme  $(R, U) = \varphi(X, Y)$ , on utilise le transfert  $\Omega' \xrightarrow{(X,Y)} \mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ , suivi du changement de variable  $\varphi : (x, y) \mapsto (r, u)$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{E}h(R, U) &= \int_{\Omega'} h(R, U) d\mathbf{P} = \int_{\Omega'} h(\varphi(X, Y)) d\mathbf{P} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \Delta} h(\varphi(x, y)) dP_{X,Y}(x, y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \Delta} h(\varphi(x, y)) f(x, y) d\lambda_2(x, y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \Delta} h(\varphi(x, y)) \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(\frac{-(x^2 + y^2)}{2\sigma^2}\right) d\lambda_2(x, y). \end{aligned}$$

Dans cette dernière intégrale, le passage en coordonnées polaires  $\varphi$  défini par l'énoncé réalise un  $C^1$ -difféomorphisme de l'ouvert  $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$  sur l'ouvert  $]0, +\infty[ \times ]-\pi, \pi[$  et par un calcul classique  $|\text{Jac}(\varphi^{-1})(r, u)| = r$ . Nous en déduisons :

$$\mathbf{E}h(R, U) = \int_{]0, +\infty[ \times ]-\pi, \pi[} h(r, u) \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp\left(\frac{-r^2}{2\sigma^2}\right) d\lambda_2(r, u).$$

---

<sup>4</sup>Il est clair que les constantes de proportionnalité  $c$  telle que  $f_X = cg$  et  $c'$  telle que  $f_Y = c'g$  sont égales à 1 parce que  $g$  est déjà une densité de probabilité.

Ce résultat s'écrit encore

$$\mathbf{E}h(R, U) = \int_{\mathbb{R}^2} h(r, u) \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp\left(\frac{-r^2}{2\sigma^2}\right) \mathbf{1}_{]0, +\infty[ \times ]-\pi, \pi[}(r, u) d\lambda_2(r, u). \quad (9)$$

En appliquant le lemme de caractérisation des mesures par les intégrales des fonctions mesurables positives  $h$ , la comparaison des égalités (8) et (9), vraies pour toute  $h$  de ce type, nous permet d'identifier  $P_{R,U}$  comme la mesure ayant pour densité par rapport à  $\lambda_2$  la fonction

$$f_{R,U} : (r, u) \mapsto \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp\left(\frac{-r^2}{2\sigma^2}\right) \mathbf{1}_{]0, +\infty[ \times ]-\pi, \pi[}(r, u).$$

On remarque que cette densité est de la forme  $g_1 \otimes g_2$  (*i.e.*  $f_{R,U}(r, u) = g_1(r)g_2(u)$ ) avec

$$g_1(r) = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(\frac{-r^2}{2\sigma^2}\right) \mathbf{1}_{]0, +\infty[}(r), \quad g_2(u) = \frac{1}{2\pi} \mathbf{1}_{]-\pi, \pi[}(u).$$

Il en résulte que les variables aléatoires  $R$  et  $U$  sont indépendantes et que leur loi a une densité proportionnelle à  $g_1$  pour  $R$  et à  $g_2$  pour  $U$ . En fait comme  $g_2$  est déjà une densité de probabilité (c'est celle de la loi uniforme sur  $] - \pi, \pi[$ ), les constantes de proportionnalité valent 1. En conclusion,  $R$  suit la loi de densité  $g_1$  et  $U$  suit la loi uniforme sur  $] - \pi, \pi[$ .

3) Calcul de  $\mathbf{E}R$ . Comme  $R$  est une variable aléatoire *positive*, on peut écrire directement sans se soucier de l'intégrabilité et en notant que  $g_1$  est nulle sur  $] - \infty, 0]$  :

$$\mathbf{E}R = \int_{\mathbb{R}} r g_1(r) d\lambda_1(r) = \int_{]0, +\infty[} r g_1(r) d\lambda_1(r) = \int_0^{+\infty} r g_1(r) dr,$$

la conversion de l'intégrale de Lebesgue  $\int_{]0, +\infty[}$  en intégrale de Riemann généralisée  $\int_0^{+\infty}$  se justifiant par la positivité et la continuité de la fonction  $r \mapsto r g_1(r)$  sur  $]0, +\infty[$ . Grâce à la parité de la fonction à intégrer, on a alors

$$\mathbf{E}R = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r^2}{\sigma^2} \exp\left(\frac{-r^2}{2\sigma^2}\right) dr = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} r^2 \exp\left(\frac{-r^2}{2\sigma^2}\right) dr = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sigma} \mathbf{E}Z^2,$$

où  $Z$  est une variable aléatoire de loi gaussienne<sup>5</sup>  $\mathfrak{N}(0, \sigma)$ . On voit immédiatement que  $\mathbf{E}Z = 0$  et donc  $\mathbf{E}Z^2 = \text{Var } Z = \sigma^2$ . On obtient ainsi

$$\mathbf{E}R = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad (10)$$

ce qui justifie *a posteriori* l'intégrabilité de la variable aléatoire *positive*  $R$  puisque  $\mathbf{E}R = \mathbf{E}|R| < +\infty$ .

---

<sup>5</sup>Le lecteur qui n'aimerait pas cette petite astuce de l'introduction de  $Z$  peut toujours effectuer le changement de variable  $t = r/\sigma$  et intégrer par parties de façon à faire apparaître un exposant impair de  $t$  dans l'intégrale...



La formule (10) confirme l'idée que le paramètre  $\sigma$  mesure l'adresse de l'archer. Plus il est petit, plus « en moyenne » le point d'impact de la flèche sera proche du centre de la cible. L'interprétation de  $\mathbf{E}R$  comme la valeur moyenne des distances au centre observées sur un grand nombre de tirs se justifie théoriquement par la loi forte des grands nombres. En effet  $R$  est intégrable et la loi forte des grands nombres de Khintchine nous dit que si  $(R_k)_{k \geq 1}$  de variables aléatoires indépendantes de même loi que  $R$ ,

$$T_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n R_k \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} \mathbf{E}R.$$

Compte-tenu de (10), on en déduit que

$$Z_n := \sqrt{\frac{2}{\pi}} T_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} \sigma.$$

En pratique, on observe  $n$  tirs du même archer et on relève les valeurs numériques des distances au centre  $r_1, \dots, r_n$  des points d'impact de la flèche. On interprète ces valeurs numériques comme les valeurs  $r_1 = R_1(\omega_0), \dots, r_n = R_n(\omega_0)$ , pour un même  $\omega_0$ . On *parie* alors que cet  $\omega_0$  (qui ne nous est pas directement accessible) se trouve dans l'ensemble  $\Omega_0 := \{\omega \in \Omega; Z_n(\omega) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \sigma\}$ . La probabilité de gagner ce pari est  $\mathbf{P}(\Omega_0) = 1$ . Ceci légitime l'estimation du paramètre inconnu  $\sigma$  par la valeur approchée  $Z_n(\omega_0)$  fournie par les observations.

**Ex 4.** *Vrai ou faux ?*

1) *Si  $K$  est un compact de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\lambda_2(K) < +\infty$ .*

C'est vrai puisqu'un compact d'un espace métrique est toujours borné. On peut donc inclure  $K$  dans un carré  $[-m, m]^2$  pour  $m$  assez grand. D'où

$$\lambda_2(K) \leq \lambda_2([-m, m]^2) = (2m)^2 < +\infty.$$

La propriété est vraie plus généralement pour tout compact de  $\mathbb{R}^d$ .

2) *Si  $A$  est un borélien au plus dénombrable de  $\mathbb{R}$ , la mesure de Lebesgue de sa frontière est nulle.*

C'est faux. Contre-exemple  $A = \mathbb{Q}$ . Comme  $\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ , sa fermeture  $\overline{\mathbb{Q}}$  est  $\mathbb{R}$ . D'autre part  $\mathbb{Q}$  est d'intérieur vide car il ne contient aucun intervalle de  $\mathbb{R}$  (dans un tel intervalle, il y a toujours au moins un irrationnel et en fait une infinité non dénombrable).

Donc  $\partial\mathbb{Q} = \overline{\mathbb{Q}} \setminus \overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R}$ , d'où  $\lambda_1(\partial\mathbb{Q}) = +\infty$ .

3) *Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  un espace mesuré et  $(f_n)_{n \geq 1}$  une suite croissante de fonctions  $\Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ , mesurables  $\mathcal{F}$ -Bor( $\mathbb{R}_+$ ), de limite  $f$  ( $f_n \uparrow f$ ). Alors*

$$\mu(\{f_n \leq 1\}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \mu(\{f \leq 1\}) \quad \text{et} \quad \mu(\{f_n < 1\}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \mu(\{f < 1\}). \quad (11)$$

C'est faux. Voici un contre-exemple valable pour les deux affirmations :  $\Omega = \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{F} = \text{Bor}(\mathbb{R})$ ,  $\mu = \lambda_1$  et  $f_n := 2\mathbf{1}_{[-n, n]}$ . La suite de fonctions  $(f_n)_{n \geq 1}$  est croissante et converge

ponctuellement sur  $\mathbb{R}$  vers la fonction constante 2. On voit immédiatement que  $\{f_n < 1\} = \{f_n \leq 1\} = ]-\infty, -n[ \cup ]n, +\infty[$ , d'où

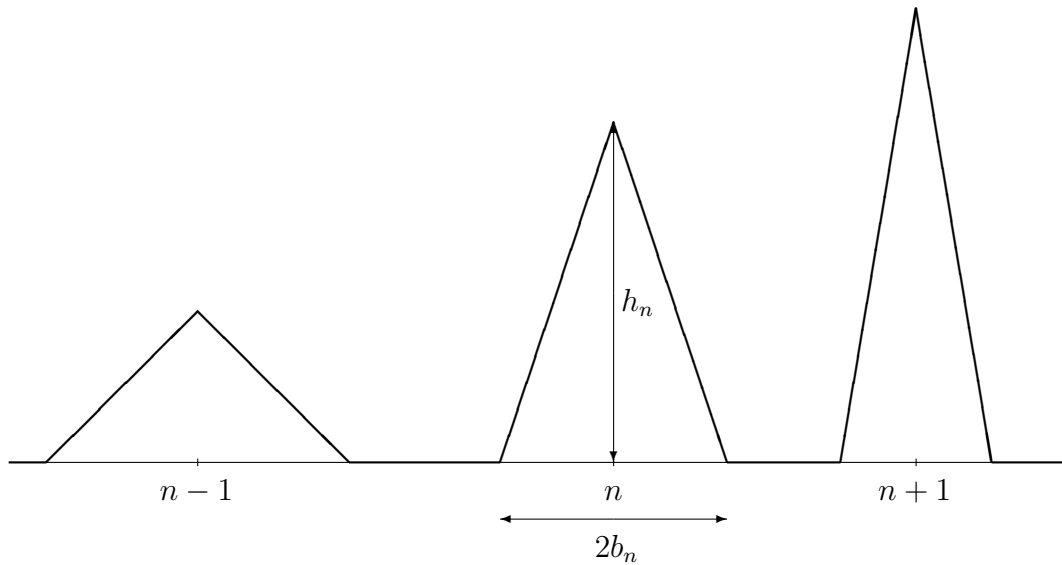
$$\mu(\{f_n \leq 1\}) = \mu(\{f_n < 1\}) = \lambda_1(] - \infty, -n[ \cup ]n, +\infty[) = +\infty.$$

Quand  $n$  tend vers l'infini, ces deux suites constantes convergent vers  $+\infty$ . D'autre part  $\{f \leq 1\} = \{f < 1\} = \emptyset$  puisque  $f$  est la fonction constante égale à 2, donc il n'y a aucun  $x$  de  $\mathbb{R}$  vérifiant  $f(x) \leq 1$ . Ainsi aucune des deux convergences (11) n'a lieu pour cet exemple.

La croissance de la suite  $(f_n)_{n \geq 1}$  implique la décroissance au sens de l'inclusion de la suite d'ensembles  $\{f_n \leq 1\}$ . On ne peut donc pas utiliser la continuité séquentielle de  $\mu$  pour conclure à (11), car il nous manque l'hypothèse  $\mu(\{f_1 \leq 1\}) < +\infty$ . Par contre si  $\mu$  est une mesure finie, alors elle a automatiquement la propriété de continuité séquentielle décroissante et dans ce cas la première convergence dans (11) est vraie. La seconde reste fausse. Contre-exemple :  $\Omega = [0, 1]$ ,  $\mathcal{F} = \text{Bor}([0, 1])$ ,  $\mu = \lambda_1$  et  $f_n = 1 - 1/n$  (fonction constante sur  $\Omega$ ).

4) Si  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  est continue et  $\lambda_1$ -intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ ,  $f(x)$  tend vers zéro quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

C'est faux. Voici une famille de contre-exemples. On considère une fonction  $f$  dont le graphe est une ligne polygonale dessinant une suite de triangles isocèles localisés aux points d'abscisse  $n \in \mathbb{N}^*$ , de base  $[n - b_n, n + b_n]$  (avec  $b_n \leq 1/2$  pour éviter tout chevauchement) et de hauteur  $h_n$ . L'aire du  $n$ -ième triangle est ainsi  $b_n h_n$  et la seule condition pour que  $f$  soit  $\lambda_1$ -intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  est que la série  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n h_n$  converge.



Cette condition n'impose nullement à  $h_n$  de tendre vers 0. Par exemple en prenant

$$b_n = \frac{1}{2n^3}, \quad h_n = n, \quad n \geq 1,$$

on obtient une fonction  $f$  continue et  $\lambda_1$ -intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  telle que  $f(n) = n$  tend vers  $+\infty$  quand  $n$  tend vers l'infini. Ceci empêche  $f$  de tendre vers 0 à l'infini.

5) Si  $f : [0, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[$  est décroissante, elle a une limite finie  $\ell$  en  $+\infty$  et pour toute fonction  $g$   $\lambda_1$ -intégrable sur  $[0, +\infty[$ ,  $\int_{\mathbb{R}_+} f(nx)g(x) d\lambda_1(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \int_{\mathbb{R}_+} g(x) d\lambda_1(x)$ .

C'est vrai. Rappelons d'abord qu'une fonction monotone est borélienne. ainsi la décroissance de  $f$  et la mesurabilité de

$g$

impliquent la mesurabilité de la fonction  $x \mapsto f(nx)g(x)$ . Vérifions ensuite que  $f$  a pour limite en  $+\infty$  le réel  $\ell := \inf_{\mathbb{R}_+} f$ . Cet infimum est un réel (de  $[0, f(0)]$ ), donc fini puisque pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,  $f(0) \geq f(x) \geq 0$  car  $f$  est décroissante et à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ . Comme  $\ell$  est le plus grand minorant de l'ensemble  $f(\mathbb{R}_+)$ , pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un  $x_\varepsilon \in \mathbb{R}_+$  tel que  $\ell \leq f(x_\varepsilon) < \ell + \varepsilon$ . Par décroissance de  $f$ , on en déduit que pour tout  $x \geq x_\varepsilon$ ,  $\ell \leq f(x) < \ell + \varepsilon$ . Ceci étant vrai pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a bien  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ .

Pour tout  $x > 0$ , on a donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(nx) = \ell$  et cette convergence implique celle de  $f(nx)g(x)$  vers  $\ell g(x)$ , sauf peut-être dans le cas où  $\ell = 0$  et  $g(x) = +\infty$ . La fonction  $g$  étant  $\lambda_1$ -intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  est finie  $\lambda_1$ -presque partout sur  $\mathbb{R}_+$ , on a donc dans tous les cas :

$$f(nx)g(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\lambda_1\text{-p.p.}} \ell g(x). \quad (12)$$

En raison de la décroissance et de la positivité de  $f$ , on a

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad |f(nx)g(x)| \leq f(0)|g(x)|,$$

ce qui montre que la convergence (12) est dominée par la fonction  $\lambda_1$ -intégrable  $f(0)|g|$ . Par le théorème de Lebesgue  $\int_{\mathbb{R}_+} f(nx)g(x) d\lambda_1(x)$  converge alors vers  $\ell \int_{\mathbb{R}_+} g(x) d\lambda_1(x)$ .

6) Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires réelles dont les lois  $P_X$  et  $P_Y$  ont chacune une densité par rapport à  $\lambda_1$ , alors la loi de  $X + Y$  a aussi une densité par rapport à  $\lambda_1$ .

C'est faux. Il suffit pour le voir de prendre  $X$  de loi uniforme sur  $[0, 1]$  et de poser  $Y = -X$ . Alors  $Y$  est aussi à densité puisque  $Y$  suit la loi uniforme sur  $[-1, 0]$ . Pourtant  $X + Y$  est la variable aléatoire constante 0, donc de loi la masse de Dirac en 0 qui elle, n'a pas de densité par rapport à  $\lambda_1$ . Le même argument fonctionne avec n'importe quelle variable aléatoire  $X$  à densité  $f$ , puisque  $Y := -X$  est à densité  $g : x \mapsto f(-x)$ .

7) Pour toute mesure finie  $\mu$  sur l'espace mesurable  $(\Omega, \mathcal{F})$  et toute application  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , mesurable  $\mathcal{F}$ -Bor( $\mathbb{R}$ ), la fonction  $F : x \mapsto F(x) := \int_{\Omega} \cos(xf(\omega)) d\mu(\omega)$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ .

C'est vrai. Il s'agit d'une application immédiate du théorème de continuité sous le signe somme. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  fixé, l'application  $\omega \mapsto \cos(xf(\omega))$  est mesurable comme composée de  $f$  mesurable  $\mathcal{F}$ -Bor( $\mathbb{R}$ ) avec la l'application continue donc borélienne  $t \mapsto \cos(xt)$ . Pour tout  $\omega \in \Omega$ , la fonction  $x \mapsto \cos(xf(\omega))$  est continue sur  $\mathbb{R}$ . On a de plus la domination :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \omega \in \Omega, \quad |\cos(xf(\omega))| \leq g(\omega) := 1$$

et la fonction constante  $g$  est  $\mu$ -intégrable sur  $\Omega$  puisque  $\mu$  est une mesure finie.

8) Soit  $(X_k)_{k \geq 1}$  une suite de v. a. indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre  $p \in ]0, 1[$ . Alors  $T_n := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} +\infty$ .

C'est vrai. Pour le voir, il suffit d'écrire

$$T_n = \sqrt{n} \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \right) = \sqrt{n} \frac{S_n}{n}$$

et de remarquer que par la loi forte des grands nombres (les  $X_k$  sont i.i.d. et bornées donc intégrables),  $S_n/n$  converge presque sûrement vers  $\mathbf{E}X_1 = p > 0$ . On en déduit que  $T_n$  tend p.s. vers  $+\infty$  et on a même un équivalent :

$$T_n \sim p\sqrt{n} \quad \text{p.s.}$$

*Remarque* : le même argument se généralise immédiatement à une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi quelconque pourvu que  $X_1$  soit intégrable et  $\mathbf{E}X_1 \neq 0$ . Sous ces hypothèses,  $T_n$  tend p.s. vers  $+\infty$  si  $\mathbf{E}X_1 > 0$  et vers  $-\infty$  si  $\mathbf{E}X_1 < 0$ . Par contre le résultat n'est plus vrai si  $\mathbf{E}X_1 = 0$ . Pour s'en convaincre, considérons une suite i.i.d.  $(Y_k)_{k \geq 1}$  telle que  $Y_1$  soit de carré intégrable et non p.s. constante et notons  $\sigma^2 = \text{Var } Y_1$  ( $\sigma > 0$ ). Alors selon le théorème limite central :

$$S_n^* := \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n (Y_k - \mathbf{E}Y_k) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{loi}} \mathfrak{N}(0, 1). \quad (13)$$

En posant  $X_k := (Y_k - \mathbf{E}Y_k)/\sigma$ , on voit que  $S_n^* = T_n$ . Les  $X_k$  sont i.i.d. d'espérance nulle (et de carré intégrable, donc *a fortiori*  $X_1 \in L^1(\Omega)$ ). Supposons que  $T_n$  converge p.s. vers  $+\infty$  et montrons que c'est contradictoire avec (13). On commence par remarquer que la convergence p.s. de  $T_n$  vers  $+\infty$  implique :

$$\forall a > 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(T_n > a) = 1. \quad (14)$$

En effet en posant  $A_n := \{\omega \in \Omega; T_n(\omega) > a\}$ , on a convergence p.s. de  $\mathbf{1}_{A_n}$  vers la constante 1 et cette convergence est dominée par la v.a. constante 1 qui est  $\mathbf{P}$ -intégrable sur  $\Omega$ . Par convergence dominée, on en déduit que  $\mathbf{E}\mathbf{1}_{A_n}$  converge vers  $\mathbf{E}(1) = 1$ , autrement dit  $\mathbf{P}(A_n)$  tend vers 1. Notons  $\Phi$  la fonction de répartition de la loi  $\mathfrak{N}(0, 1)$  et choisissons  $a > 0$ , par exemple  $a = 2$ . Par continuité de  $\Phi$ , (13) et l'égalité  $T_n = S_n^*$ , on a convergence de  $\mathbf{P}(T_n \leq 2)$  vers  $\Phi(2) \simeq 0,977 2$ . On en déduit que  $\mathbf{P}(T_n > 2)$  converge vers  $1 - \Phi(2) \simeq 0,022 8 < 1$ , ce qui contredit (14).

Le cas d'une suite de Bernoulli avec  $p = 0$  ne relève pas du théorème limite central. En effet alors  $X_k = 0$  p.s. et pour tout  $n \geq 1$ ,  $T_n = 0$  p.s., d'où l'on déduit la convergence presque sûre de  $T_n$  vers 0.