

Corrigé du Devoir n° 4

Cette version a été corrigée par rapport à la version papier diffusée le 16 janvier 2003.

Ex 1. Application du théorème de Fubini à l'interversion série-intégrale

1) Montrons que pour toute fonction borélienne $g : I \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, on a

$$\int_I Fg d\lambda = \sum_{k=0}^{+\infty} |c_k| \int_I |x|^k g(x) d\lambda(x).$$

On considère la fonction :

$$\begin{aligned} \varphi : (\mathbb{N} \times I) &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ (k, x) &\longmapsto c_k x^k g(x) \end{aligned}$$

\mathbb{N} est muni de la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et I de la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Vérifions que la fonction φ est $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) - \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ mesurable. Soit $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\varphi^{-1}([a, +\infty]) = \{(k, x) \in \mathbb{N} \times I, c_k x^k g(x) \in [a, +\infty]\}.$$

Pour $k \in \mathbb{N}$, notons

$$I_k = \{x \in I, c_k x^k g(x) \in [a, +\infty]\},$$

$I_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, car g est mesurable et $x \mapsto x^k$ est continue. On a

$$\varphi^{-1}([a, +\infty]) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{k\} \times I_k \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

la fonction φ est donc $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) - \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ mesurable, il en est de même pour la fonction $|\varphi|$ qui est de plus positive. En considérant la somme infinie comme une intégrale par rapport à la mesure de comptage ν et en appliquant le théorème de Tonelli-Fubini, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_I Fg d\lambda &= \int_I \left(\sum_{k=0}^{+\infty} |c_k| |x|^k \right) g(x) d\lambda(x) \\ &= \int_I \int_{\mathbb{N}} |\varphi(k, x)| d\nu(k) d\lambda(x) \\ &= \int_{\mathbb{N}} \int_I |\varphi(k, x)| d\lambda(x) d\nu(k) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_I |c_k| |x|^k g(x) d\lambda(x) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} |c_k| \int_I |x|^k g(x) d\lambda(x). \end{aligned}$$

2) On en déduit une condition suffisante pour que

$$\int_I fg \, d\lambda = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k \int_I x^k g(x) \, d\lambda(x).$$

Comme g et f ne sont plus des fonctions positives, cette égalité a lieu si l'on peut appliquer le théorème de Fubini, la condition suffisante est donc que la fonction φ soit intégrable par rapport à la mesure produit $\nu \otimes \lambda$, c'est-à-dire que $|\varphi|$ soit intégrable, soit encore

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |c_k| \int_I |x|^k g(x) \, d\lambda(x) < +\infty.$$

3) On montre que

$$\int_0^1 \frac{(x \ln x)^2}{1+x^2} dx = 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k+1)^3}.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x \ln x)^2}{1+x^2} = 0$, la fonction définie par $x \mapsto \frac{(x \ln x)^2}{1+x^2}$ est prolongeable par continuité sur $[0, 1]$. Les intégrales de Riemann et de Lebesgue coïncident donc. On applique alors la question précédente à

$$I = [0, 1], \quad g(x) = (x \ln x)^2, \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{2k}.$$

Il faut vérifier que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \int_I x^{2k} g(x) \, d\lambda(x) < +\infty.$$

Or,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \int_I x^{2k} g(x) \, d\lambda(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_I x^{2k} (x \ln x)^2 \, d\lambda(x),$$

et

$$\int_I (x \ln x)^2 x^{2k} \, d\lambda(x) = \int_I x^{2k+2} (\ln x)^2 \, d\lambda(x) = \int_0^1 x^{2k+2} (\ln x)^2 \, dx,$$

cette dernière intégrale se calcule par deux intégrations par parties successives et on obtient

$$\int_0^1 x^{2k+2} (\ln x)^2 \, dx = -\frac{2}{2k+3} \int_0^1 x^{2k+2} \ln x \, dx = \frac{2}{(2k+3)^2} \int_0^1 x^{2k+2} \, dx = \frac{2}{(2k+3)^3}.$$

On a bien $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{(2k+3)^3} < +\infty$ et, par conséquent,

$$\int_0^1 \frac{(x \ln x)^2}{1+x^2} dx = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \int_I x^{2k+2} (\ln x)^2 \, d\lambda(x) = 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+3)^3} = 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k+1)^3}.$$

4) On montre que

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{e^x - 1} dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a}{k^2 + a^2}.$$

La fonction $x \mapsto \frac{\sin ax}{e^x - 1}$ est continue sur $]0, +\infty[$ et son intégrale de Riemann est absolument convergente, en effet :

- en 0, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{e^x - 1} = a$, la fonction est donc prolongeable par continuité
- en $+\infty$, on a : $0 \leq \left| \frac{\sin ax}{e^x - 1} \right| \leq \frac{1}{e^x - 1} \sim e^{-x}$, dont l'intégrale est convergente.

Par ailleurs, $\forall x \in]0, +\infty[$, on a $\frac{1}{e^x - 1} = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = e^{-x} \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-kx}$.

On a donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{e^x - 1} dx = \int_I \frac{\sin ax}{e^x - 1} d\lambda(x) = \int_I (\sin ax) e^{-x} \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-kx} d\lambda(x).$$

L'intégrale étant absolument convergente, on a

$$\int_I \left| \frac{\sin ax}{e^x - 1} \right| d\lambda(x) = \int_I \int_{\mathbb{N}} |\sin ax| e^{-x} e^{-kx} d\nu(k) d\lambda(x) < +\infty,$$

et, comme la fonction $(k, x) \mapsto (\sin ax) e^{-x} e^{-kx}$ est $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) - \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ mesurable, on peut appliquer le théorème de Fubini qui nous donne

$$\int_I (\sin ax) e^{-x} \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-kx} d\lambda(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_I (\sin ax) e^{-kx} d\lambda(x).$$

Calculons $\int_I (\sin ax) e^{-kx} d\lambda(x)$ en remarquant qu'elle coïncide avec l'intégrale de Riemann et en effectuant deux intégrations par parties successives :

$$J_k = \int_0^{+\infty} (\sin ax) e^{-kx} dx = \frac{a}{k} \int_0^{+\infty} e^{-kx} \cos ax dx = -\frac{a^2}{k^2} J_k + \frac{a}{k^2}$$

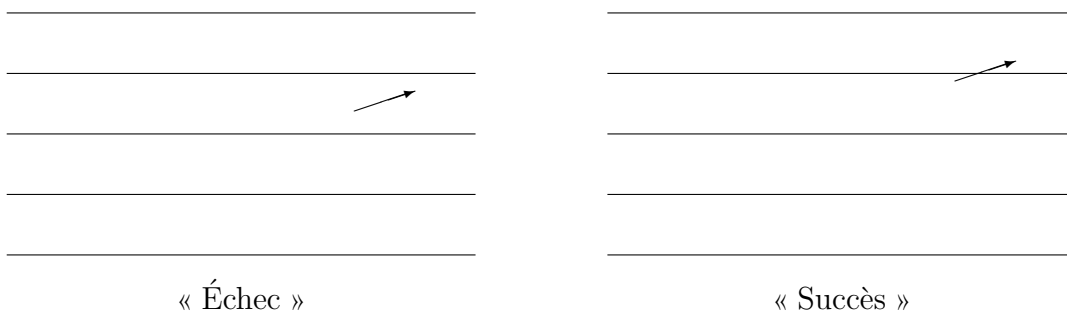
d'où

$$J_k = \frac{a}{k^2 + a^2},$$

et

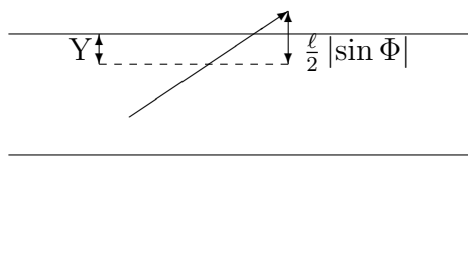
$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{e^x - 1} dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a}{k^2 + a^2}.$$

Ex 2. *L'aiguille de Buffon*



On note Y la distance du milieu de l'aiguille à la droite du réseau la plus proche. Y prend ses valeurs dans $[0, \frac{a}{2}]$. On note Φ une mesure de l'angle entre les droites du réseau (toutes orientées dans le même sens) et l'aiguille orientée du chas vers la pointe. Φ prend ses valeurs dans $[0, 2\pi]$.

Y et Φ sont des variables aléatoires. La connaissance du couple $(Y(\omega), \Phi(\omega))$ suffit pour savoir s'il y a ou non intersection.



Nous ferons les hypothèses suivantes sur les variables aléatoires Y et Φ :

- (H_1) Y suit la loi uniforme sur $[0, \frac{a}{2}]$.
- (H_2) Φ suit la loi uniforme sur $[0, 2\pi]$.
- (H_3) Y et Φ sont indépendantes.

1) On note E l'évènement « l'aiguille coupe l'une des droites du réseau ». La longueur de la projection de la demi-aiguille sur une droite orthogonale au réseau est $Z = \frac{\ell}{2} |\sin \Phi|$. Il y a donc intersection si et seulement si la distance Y du centre de l'aiguille à la droite du réseau la plus proche est inférieure ou égale à Z . Ceci nous permet d'écrire l'évènement E sous la forme :

$$E = \left\{ Y \leq \frac{\ell}{2} |\sin \Phi| \right\}.$$

2) Comme Y et Φ sont indépendantes, la loi du couple est le produit des lois marginales : $P_{(Y,\Phi)} = P_Y \otimes P_\Phi$. Comme ces lois marginales sont à densités par rapport à λ_1 , on en déduit que $P_{(Y,\Phi)}$ est à densité $f_Y \otimes f_\Phi$ par rapport à λ_2 . D'où

$$f_{(Y,\Phi)}(y, t) = f_Y(y) f_\Phi(t) = \frac{2}{a} \mathbf{1}_{[0, a/2]}(y) \frac{1}{2\pi} \mathbf{1}_{[0, 2\pi]}(t) = \frac{1}{a\pi} \mathbf{1}_{[0, a/2] \times [0, 2\pi]}(y, t).$$

On voit ainsi que le couple (Y, Φ) suit la loi uniforme sur le rectangle $[0, a/2] \times [0, 2\pi]$.

3) Notons D le borélien de \mathbb{R}^2 défini par

$$D := \left\{ (t, y) \in [0, 2\pi] \times [0, a/2]; y \leq \frac{\ell}{2} |\sin t| \right\}.$$

Comme l'évènement E s'écrit aussi $\{(\Phi, Y) \in D\}$, on peut calculer $\mathbf{P}(E)$ en utilisant la loi du couple (Φ, Y) qui est la loi uniforme sur $[0, 2\pi] \times [0, a/2]$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(E) = \mathbf{P}((\Phi, Y) \in D) &= P_{(\Phi, Y)}(D) \\ &= \int_D f_{(\Phi, Y)}(y, t) d\lambda_2(y, t) \\ &= \frac{1}{a\pi} \lambda_2(D \cap [0, 2\pi] \times [0, a/2]) \\ &= \frac{1}{a\pi} \lambda_2(D), \end{aligned}$$

en remarquant que $D \subset [0, 2\pi] \times [0, a/2]$. Le calcul de $\mathbf{P}(E)$ se réduit ainsi à celui de l'aire de l'hypographe de la fonction $g : t \mapsto \frac{\ell}{2} |\sin t| \mathbf{1}_{[0, 2\pi]}(t)$. Par conséquent

$$\lambda_2(D) = \int_{[0, 2\pi]} g d\lambda_2 = \int_0^{2\pi} \frac{\ell}{2} |\sin t| dt = \ell \int_0^\pi \sin t dt = 2\ell.$$

La conversion de l'intégrale de Lebesgue (par rapport à λ_1) en intégrale de Riemann est légitime ici car la fonction g est continue et l'ensemble d'intégration est un intervalle fermé borné. Finalement,

$$\mathbf{P}(E) = \frac{2\ell}{a\pi}$$

4) On effectue une suite de lancers de l'aiguille et on note E_i l'évènement « lors du i ème lancer, l'aiguille intersecte une des droites du réseau ». On pose $X_i = \mathbf{1}_{E_i}$ et

$$F_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

Les X_i sont des variables aléatoires de Bernoulli, de paramètre $p := \mathbf{P}(E_i) = \mathbf{P}(E)$. Elles sont clairement dans $L^1(\Omega)$, puisque bornées. Les E_i forment une suite d'évènements mutuellement indépendants et de même probabilité p . Il en résulte que les X_i forment une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi Bern(p). Par la loi forte des grands nombres pour des variables i.i.d. et intégrables (théorème de Khintchine),

$$F_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} \mathbf{E}X_1 = \mathbf{P}(E).$$

Compte-tenu du calcul de $\mathbf{P}(E)$, on peut réécrire ce résultat sous la forme :

$$\frac{2\ell}{aF_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} \pi.$$

L'interprétation physique est la suivante. Si on réalise *une* série de lancers avec n grand, la valeur $F_n(\omega)$ observée nous fournira l'approximation

$$\frac{2\ell}{aF_n(\omega)} \simeq \pi.$$

On considère ainsi qu'il est physiquement impossible d'observer un ω n'appartenant pas à l'évènement de probabilité 1 $\{F_n \text{ converge vers } p\}$.

Le document de la page 7 représente les résultats de 1200 lancers réalisés avec une allumette et un réseau tracé sur une feuille de format A4. On a ici $\ell = a = 4,5$ cm et $p = \frac{2}{\pi} \simeq 0,637$. Les lancers sont regroupés par dizaine. Les bits 0 ou 1 sont les valeurs observées pour $X_i(\omega)$. Après chaque dizaine on a noté le nombre d'intersection observées sur la dizaine et le nombre d'intersections cumulé depuis le début des lancers. Le tableau des fréquences observées F_{10k} pour $k = 1, \dots, 120$ est présenté page 8. Cette expérience permet de proposer l'estimation :

$$\pi \simeq \frac{2}{0,627} \simeq 3,1898.$$

Si vous avez la patience et le loisir de réaliser votre propre expérience, vous trouverez probablement une valeur légèrement différente...

Bien entendu cette méthode pour calculer π n'est pas très performante. On peut montrer que sa vitesse de convergence est en $O(n^{-1/2})$. Son intérêt est essentiellement d'ordre culturel et historique.

Résultats de 1200 lancers

0111110001	6	6	1111111011	9	69	1011111110	8	131
0101111011	7	13	1110100111	7	76	1001110111	7	138
0011100110	5	18	0111100010	5	81	1101101110	7	145
1110011101	7	25	1110111100	7	88	1001011110	6	151
1110000011	5	30	0000100101	3	91	0111110001	6	157
0001111001	5	35	0001111011	6	97	1101001001	5	162
1101000101	5	40	1110011001	6	103	1101001100	5	167
1101111000	6	46	1011111110	8	111	1110100101	6	173
1111011111	9	55	1101010101	6	117	0110001100	4	177
1000100111	5	60	1100100111	6	123	1011010110	6	183
1011101011	7	190	0111110011	7	251	1101100110	6	315
1101100010	5	195	0110110111	7	258	1011011101	7	322
1100000111	5	200	1011110010	6	264	1100101111	7	329
0001111111	7	207	0000111001	4	268	1111010010	6	335
0010001101	4	211	0111100101	6	274	1110001111	7	342
0101001011	5	216	1111111101	9	283	0101001111	6	348
0100111011	6	222	1101010101	6	289	1001100101	5	353
0111111101	8	230	0111111110	8	297	1101111001	7	360
1111111010	8	238	0011101000	4	301	1010111111	8	368
1110001011	6	244	0111111101	8	309	0111101000	5	373
1001110011	6	379	1011011100	6	444	0111111110	8	518
1111011111	9	388	1011111010	7	451	0100010010	3	521
0110011111	7	395	1011110111	8	459	0101101011	6	527
1000011101	5	400	0011001111	6	465	0011111011	7	534
1111100111	8	408	1000001101	4	469	1100100101	5	539
1010010001	4	412	1011011111	8	477	1010110110	6	545
0100001110	4	416	1111111111	10	487	1111101101	8	553
1111011010	7	423	1011111101	8	495	1110111101	8	561
1010111110	7	430	1011111101	8	503	1110110110	7	568
1101011111	8	438	1110011101	7	510	0111001101	6	574
1000010110	4	578	1101001001	5	634	1100110011	6	690
0110110110	6	584	1110111111	9	643	1010111101	7	697
1000101100	4	588	0110110110	6	649	1010111110	7	704
1011011101	7	595	1000001000	2	651	1111111111	10	714
1100110110	6	601	1000011000	3	654	0011011110	6	720
1111011010	7	608	0111001011	6	660	0111111110	8	728
0001000110	3	611	1100010100	4	664	1001111101	7	735
0001110001	4	615	0101110110	6	670	0100111101	6	741
1111100111	8	623	1111111001	8	678	0100110101	5	746
0010111110	6	629	0000111111	6	684	1110101010	6	752

Tableau des fréquences observées

10 <i>k</i>	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
		0,600	0,650	0,600	0,625	0,600	0,583	0,571	0,575	0,611
100	0,600	0,627	0,633	0,623	0,629	0,607	0,606	0,606	0,617	0,616
200	0,615	0,624	0,627	0,630	0,629	0,628	0,623	0,619	0,618	0,610
300	0,610	0,613	0,609	0,606	0,609	0,603	0,600	0,600	0,605	0,610
400	0,610	0,612	0,614	0,614	0,609	0,609	0,615	0,615	0,619	0,614
500	0,618	0,618	0,619	0,621	0,620	0,622	0,621	0,619	0,621	0,624
600	0,622	0,621	0,626	0,627	0,625	0,628	0,624	0,621	0,622	0,623
700	0,626	0,625	0,626	0,629	0,628	0,625	0,628	0,632	0,635	0,637
800	0,637	0,640	0,635	0,635	0,636	0,634	0,634	0,636	0,637	0,638
900	0,638	0,635	0,635	0,632	0,633	0,633	0,633	0,630	0,628	0,629
1000	0,629	0,628	0,630	0,630	0,626	0,623	0,623	0,621	0,620	0,622
1100	0,622	0,622	0,622	0,623	0,626	0,626	0,628	0,628	0,628	0,627
1200	0,627									