**Université des Sciences et Technologies de Lille**
**U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées**

**IFP** **Année 02-03**

## Corrigé du devoir n° 3

### Problème 1

**1 -** En vue d'appliquer le théorème de dérivation sous le signe somme, nous allons établir certaines majorations de fonctions. Nous utiliserons aussi le résultat élémentaire suivant :

> *Toute fonction réelle continue sur $[1, +\infty[$, respectivement sur $]0, 1]$, qui a une limite réelle quand $x$ tend vers $+\infty$, respectivement quand $x$ tend vers 0 par valeurs $> 0$, est bornée.*

Dans les inégalités qui suivent, $a$ et $A$ sont des réels quelconques fixés tels que $0 < a < A$. On suppose que $a < x < A$ et on rappelle que

$$\forall t > 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (t)^n = e^{n \log t}.$$

**Cas 1 :** $t \geq 1$

$$|e^{-t}(\log t)^n t^{x-1}| \leq e^{-t}(\log t)^n t^{A-1} \leq M(n, A) \cdot e^{-\frac{t}{2}},$$

où $M(n, A) = \sup_{t \geq 1} e^{-\frac{t}{2}}(\log t)^n t^{A-1}$ vérifie $0 < M(n, A) < +\infty$, d'après le résultat élémentaire rappelé ci-dessus, puisque $e^{-\frac{t}{2}}(\log t)^n t^{A-1} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$.

**Cas 2 :** $0 < t \leq 1$

$$|e^{-t}(\log t)^n t^{x-1}| \leq |\log t|^n t^{a-1} \leq m(n, a) \frac{1}{t^{1-\frac{a}{2}}},$$

où $m(n, a) = \sup_{0 < t \leq 1} |\log t|^n t^{\frac{a}{2}}$ vérifie $0 < m(n, a) < +\infty$ puisque $|\log t|^n t^{\frac{a}{2}} \xrightarrow[t \to 0, t > 0]{} 0$.

On en déduit que

$$(1) \qquad \forall t > 0,\ |e^{-t}(\log t)^n t^{x-1}| \leq m(n, a) \frac{1}{t^{1-\frac{a}{2}}} \mathbf{1}_{]0,1[}(t) + M(n, A) \cdot e^{-\frac{t}{2}} \mathbf{1}_{[1,+\infty[}(t),$$

cette fonction majorante, indépendante du paramètre $x$ variant dans $]a, A[$, étant $\lambda$-intégrable sur $]0, +\infty[$, ce qui se démontre facilement en passant à l'intégrale de Riemann généralisée. De plus, pour tout réel $t > 0$, la fonction $x \mapsto e^{-t}(\log t)^n t^{x-1}$ est dérivable sur $]a, A[$ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto e^{-t}(\log t)^{n+1} t^{x-1}$. On en déduit, pour $n = 0$, que $\Gamma$ est bien définie sur $]a, A[$, puis, en appliquant le théorème de dérivation sous le signe somme, en utilisant notamment (1) pour $n = 1$, que $\Gamma$ est dérivable sur cet intervalle et que sa dérivée vérifie

$$\forall x \in ]a, A[, \quad \Gamma'(x) = \int_{]0,+\infty[} e^{-t}(\log t)t^{x-1}\,\lambda(dt).$$

On peut ensuite itérer le procédé et, à l'aide d'une démonstration par récurrence, démontrer que $\Gamma$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]a, A[$ et que

$$(2) \qquad \forall x \in ]a, A[, \quad \Gamma^{(n)}(x) = \int_{]0,+\infty[} e^{-t}(\log t)^n t^{x-1}\,\lambda(dt).$$

Ceci étant vrai quels que soient les réels $a$ et $A$ tels que $0 < a < A$, on en déduit que $\Gamma$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et que pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel $x > 0$, $\Gamma^{(n)}(x)$ est donné par (2).

**2 -** Pour tous réels $a, s > 0$, en faisant le changement de variables $u = at$ dans l'intégrale de Lebesgue suivante d'une fonction continue positive, on obtient

$$\int_{]0,+\infty[} t^{s-1}e^{-at}\,\lambda(dt) = \int_{]0,+\infty[} \frac{u^{s-1}}{a^{s-1}}e^{-u}\frac{1}{a}\,\lambda(du) = \frac{\Gamma(s)}{a^s}\cdot$$

Sur $]0, +\infty[$, la fonction $t \mapsto \dfrac{t^{s-1}}{e^t - 1}$ est continue positive. Dans le calcul qui suit, on intervertira une intégrale et une série de fonctions mesurables positives, ce qui est licite :

$$\begin{aligned}
\int_{]0,+\infty[} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1}\,\lambda(dt) &= \int_{]0,+\infty[} \frac{e^{-t}t^{s-1}}{1 - e^{-t}}\,\lambda(dt) \\
&= \int_{]0,+\infty[} \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-t}t^{s-1}e^{-nt}\Big)\,\lambda(dt) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{]0,+\infty[} e^{-t}t^{s-1}e^{-nt}\,\lambda(dt) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{]0,+\infty[} e^{-nt}t^{s-1}\,\lambda(dt) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Gamma(s)}{n^s} \leq +\infty.
\end{aligned}$$

Si $s > 1$, la série obtenue est convergente. En effet, $\displaystyle\int_{]0,+\infty[} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1}\,\lambda(dt) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1}\,dt$, intégrale de Riemann généralisée d'une fonction continue positive sur $]0, +\infty[$, qui est convergente parce que

$$\frac{t^{s-1}}{e^t - 1} \sim_{0_+} \frac{1}{t^{2-s}} \quad \text{et} \quad \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} \sim_{+\infty} e^{-t}t^{s-1}.$$

Finalement, $\displaystyle\int_{]0,+\infty[} \frac{t^{s-1}}{e^t-1}\,\lambda(dt) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Gamma(s)}{n^s} < +\infty.$

**3 -** Soit $n$ un entier $\geq 0$. $\displaystyle\int_{]0,+\infty[} t^{2n}e^{-t^2}\,\lambda(dt)$ a un sens comme intégrale de Lebesgue d'une fonction mesurable positive sur $]0,+\infty[$. Faisons le changement de variables $t^2 = u$ ou $t = \sqrt{u}$, directement dans cette intégrale de Lebesgue (la valeur absolue du jacobien $\dfrac{1}{2\sqrt{u}}$ ne se voit pas car celui-ci est positif) :

$$\int_{]0,+\infty[} t^{2n}e^{-t^2}\,\lambda(dt) = \int_{]0,+\infty[} u^n e^{-u}\frac{1}{2\sqrt{u}}\,\lambda(du) = \frac{1}{2}\int_{]0,+\infty[} u^{n-\frac{1}{2}}e^{-u}\,\lambda(du) = \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{2}\cdot$$

**4 -** $a$ désigne maintenant un réel quelconque. La fonction $t \mapsto e^{-t^2}\cos at$ est $\lambda$-intégrable sur $[0,+\infty[$ puisque c'est une fonction continue, donc mesurable, telle que

$$\forall t \geq 0, \quad |e^{-t^2}\cos at| \leq e^{-t^2},$$

qui est $\lambda$-intégrable d'après la question précédente appliquée à $n = 0$. De plus,

$$f(a) = \int_{]0,+\infty[} e^{-t^2}\cos at\,\lambda(dt) = \int_{]0,+\infty[} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(at)^{2n}e^{-t^2}}{(2n)\,!}\,\lambda(dt).$$

On peut appliquer le théorème d'interversion d'une intégrale et d'une série de fonctions parce que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left|\frac{(-1)^n(at)^{2n}e^{-t^2}}{(2n)\,!}\right| \leq e^{-t^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{|a|^n t^n}{n\,!} = e^{|a|t-t^2},$$

qui est $\lambda$-intégrable sur $[0,+\infty[$. On en déduit que

$$f(a) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n a^{2n}}{(2n)\,!}\int_{]0,+\infty[} t^{2n}e^{-t^2}\,\lambda(dt),$$

puis, d'après la question précédente, que

$$f(a) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n a^{2n}}{(2n)\,!}\cdot\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{2}\cdot \tag{3}$$

Or on sait que la fonction $\Gamma$ vérifie les égalités

$$\forall x > 0, \quad \Gamma(x+1) = x\cdot\Gamma(x) \quad \text{et} \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \tag{4}$$

ce qui se démontre en intégrant par parties, via l'intégrale de Riemann généralisée

$$\forall x > 0,\ \ \Gamma(x+1) = \int_{]0,+\infty[} e^{-t}t^x\,\lambda(dt) = \Big[-e^{-t}t^x\Big]_0^{+\infty} + x\int_{]0,+\infty[} e^{-t}t^{x-1}\,\lambda(dt) = x\cdot\Gamma(x),$$

puis, pour calculer $\Gamma(\frac{1}{2})$, en faisant le changement de variables $\sqrt{t} = u$ dans l'intégrale de Lebesgue,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{]0,+\infty[} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t}\,\lambda(dt) = 2\int_{]0,+\infty[} e^{-u^2}\,\lambda(du) = \sqrt{\pi}.$$

En appliquant les relations (4) à $\Gamma(n+\frac{1}{2})$, on trouve

$$\begin{aligned}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\times\cdots\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\times\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{(2n)\,!}{2^{2n}\cdot n\,!}\sqrt{\pi}.\end{aligned}$$

Finalement, d'après (3),

$$f(a) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n\,!}\left(\frac{a^2}{4}\right)^n = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot e^{-\frac{a^2}{4}}.$$

**Problème 2**

**1 -** $\alpha_n = \displaystyle\int_{]a,b[} \cos^2(nx)\,\lambda(dx) = \int_{[a,b]} \cos^2(nx)\,\lambda(dx)$ se calcule comme l'intégrale de Riemann d'une fonction continue sur un intervalle fermé borné, ce qui donne, en passant à l'angle double,

$$\alpha_n = \frac{b-a}{2} + \frac{1}{2}\int_a^b \cos(2nx)\,dx = \frac{b-a}{2} + \frac{\sin(2nb)-\sin(2na)}{4n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}\lambda(]a,b[).$$

**2 -** Si $U$ est un ouvert borné, $U$ est la réunion d'une famille dénombrable infinie d'intervalles ouverts deux à deux disjoints, nécessairement bornés, vides ou non, notés $I_p,\ p \geq 1$, d'après le théorème de Cantor. Comme la mesure $\nu_n$ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ de densité $\cos^2(n\bullet)$ est $\sigma$-additive,

$$\nu_n(U) = \int_U \cos^2(nx)\,\lambda(dx) = \sum_{p=1}^{+\infty}\nu_n(I_p) = \sum_{p=1}^{+\infty}\int_{I_p}\cos^2(nx)\,\lambda(dx).$$

De plus, pour tous entiers $p, n \geq 1$, notamment d'après la question précédente,

$$\int_{I_p}\cos^2(nx)\,\lambda(dx) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}\lambda(I_p),\ \int_{I_p}\cos^2(nx)\,\lambda(dx) \leq \lambda(I_p) \text{ et } \sum_{p=1}^{+\infty}\lambda(I_p) = \lambda(U) < +\infty.$$

Nous avons donc une suite (indicée par $n$) de fonctions définies sur $\mathbb{N}^*$ (dont le point courant est noté $p$) qui converge partout sur $\mathbb{N}^*$ vers la fonction $\varphi\ :\ p \mapsto \frac{1}{2}\lambda(I_p)$. De plus, cette suite de fonctions est dominée par $2\varphi$ (première inégalité) qui est intégrable par rapport à la mesure de comptage sur $\mathbb{N}^*$ (deuxième inégalité). On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et conclure que

$$\int_U \cos^2(nx)\,\lambda(dx) = \sum_{p=1}^{+\infty} \int_{I_p} \cos^2(nx)\,\lambda(dx) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{+\infty} \lambda(I_p) = \frac{\lambda(U)}{2}\cdot$$

**3 -** Si $F$ est un fermé borné de $\mathbb{R}$, soit $U$ un ouvert borné de $\mathbb{R}$ contenant $F$. Alors $U \setminus F$ est un ouvert borné de $\mathbb{R}$, d'où il résulte, les intégrales ci-dessous étant finies, que

$$\int_F \cos^2(nx)\,\lambda(dx) = \int_U \cos^2(nx)\,\lambda(dx) - \int_{U\setminus F} \cos^2(nx)\,\lambda(dx),$$

puis, quand $n \longrightarrow +\infty$ et d'après la question précédente, que

$$\int_F \cos^2(nx)\,\lambda(dx) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}\big(\lambda(U) - \lambda(U \setminus F)\big) = \frac{\lambda(F)}{2},$$

parce que $\lambda(U) = \lambda(F) + \lambda(U \setminus F)$ et que ces nombres sont finis.

On se donne maintenant un borélien borné $B$ de $\mathbb{R}$. D'après l'énoncé, il existe une suite croissante $(F_n,\, n \geq 1)$ de fermés de $\mathbb{R}$ et une suite décroissante $(U_n,\, n \geq 1)$ d'ouverts <u>bornés</u> de $\mathbb{R}$ tels que

$$F_n \subseteq B \subseteq U_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \lambda(F_n) = \lim_{n\to+\infty} \lambda(U_n) = \lambda(B).$$

On en déduit, pour tous entiers $n, p \geq 1$, que

$$\int_{F_n} \cos^2(px)\,\lambda(dx) \leq \int_B \cos^2(px)\,\lambda(dx) \leq \int_{U_n} \cos^2(px)\,\lambda(dx)$$

puis, quand $p \longrightarrow +\infty$, que

$$\frac{\lambda(F_n)}{2} \leq \liminf_{p\to+\infty} \int_B \cos^2(px)\,\lambda(dx) \leq \limsup_{p\to+\infty} \int_B \cos^2(px)\,\lambda(dx) \leq \frac{\lambda(U_n)}{2},$$

ce qui montre, quand $n \longrightarrow +\infty$, que

$$\liminf_{p\to+\infty} \int_B \cos^2(px)\,\lambda(dx) = \limsup_{p\to+\infty} \int_B \cos^2(px)\,\lambda(dx) = \frac{\lambda(B)}{2}\cdot$$

En résumé, pour tout borélien borné $B$ de $\mathbb{R}$, on a donc

$$\int_B \cos^2(nx)\,\lambda(dx) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\lambda(B)}{2}\cdot \tag{5}$$

**3.bis -** La propriété (5) péniblement obtenue ci-dessus s'obtient facilement en utilisant la théorie des séries de Fourier. $B$ étant un borélien borné, choisissons un entier $k$ assez grand pour que $B \subseteq [-k\pi, k\pi]$ et introduisons la fonction $\varphi$ définie sur $[-\pi, \pi]$ par

$$\forall u \in [-\pi, \pi], \quad \varphi(u) = \mathbf{1}_B(ku).$$

$\varphi$ étant de carré intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $[-\pi,\pi]$ comme fonction bornée et parce que $\lambda([-\pi,\pi]) = 2\pi < +\infty$, introduisons également ses coefficients de Fourier $c_n(\varphi)$, $n \in \mathbb{Z}$, définis par

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{]-\pi,\pi[} \varphi(u) e^{-inu}\, \lambda(du).$$

Ils vérifient la relation de Parseval, soit

$$\frac{1}{2\pi} \int_{]-\pi,\pi[} |\varphi(u)|^2\, \lambda(du) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(\varphi)|^2,$$

dont on déduit que

$$c_n(\varphi) \xrightarrow[|n|\to+\infty]{} 0, \quad \text{puis} \quad \int_{]-\pi,\pi[} \varphi(u) \cos nu\, \lambda(du) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

en prenant la partie réelle de $c_n(\varphi)$. Or

$$\int_{]-\pi,\pi[} \varphi(u) \cos nu\, \lambda(du) = \frac{1}{k} \int_{]-k\pi,k\pi[} \mathbf{1}_B(v) \cos \frac{nv}{k}\, \lambda(dv) = \frac{1}{k} \int_B \cos \frac{nv}{k}\, \lambda(dv),$$

parce que $B \subseteq [-k\pi, k\pi]$. On en déduit, en faisant tendre $n$ vers $+\infty$ suivant les multiples de $k$, que

$$\int_B \cos nx\, \lambda(dx) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

ce qui implique, comme on l'a vu précédemment, que

$$\int_B \cos^2 nx\, \lambda(dx) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\lambda(B)}{2}.$$

**4 -** Comme $B = \bigcup_{j=0}^{+\infty} B_j$ et que ces boréliens sont deux à deux disjoints, comme de plus la mesure $\nu_n$ est $\sigma$-additive, $\nu_n(B) = \sum_{j=0}^{+\infty} \nu_n(B_j)$ ou, en exprimant la mesure $\nu_n$ à l'aide de sa densité,

$$\int_B \cos^2 nx\, \lambda(dx) = \sum_{j=0}^{+\infty} \int_{B_j} \cos^2 nx\, \lambda(dx).$$

La série du deuxième membre est l'intégrale par rapport à la mesure de comptage de $\mathbb{N}$ de la fonction $j \mapsto \int_{B_j} \cos^2 nx\, \lambda(dx)$. Quand $n$ tend vers $+\infty$, cette suite de fonctions converge vers la fonction $j \mapsto \frac{\lambda(B_j)}{2}$, d'après la question précédente, parce que les boréliens $B_j$ sont bornés et cette convergence est dominée par la fonction $j \mapsto \lambda(B_j)$ qui est intégrable sur $\mathbb{N}$ par rapport à sa mesure de comptage puisque $\lambda(B)=\sum_{j=0}^{+\infty}\lambda(B_j)<+\infty$. On peut donc appliquer la théorème de convergence dominée et conclure que

$$\int_B \cos^2 nx\,\lambda(dx) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda(B_j)}{2} = \frac{\lambda(B)}{2}\cdot$$

**4.bis -** $\mathbf{1}_B$ étant $\lambda$-intégrable sur $\mathbb{R}$ puisque $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_B\,d\lambda = \lambda(B) < +\infty$, on en déduit en appliquant le théorème de Riemann-Lebesgue que

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_B(x)\cdot e^{-iux}\,\lambda(dx) \xrightarrow[|u|\to+\infty]{} 0.$$

En prenant la partie réelle de cette intégrale et en faisant tendre $u$ vers $+\infty$ suivant les entiers, on obtient directement

$$\int_B \cos nx\,\lambda(dx) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

résultat qui contient tous les précédents !

**5 -** Supposons que $(a_n,\ n\geq 1)$ ne converge pas vers 0 quand $n$ tend vers $+\infty$. Il existerait donc $\varepsilon > 0$ et une suite strictement croissante $\big(n_k,\ k\geq 1\big)$ d'entiers $\geq 1$ tels que

$$\forall k\geq 1,\quad |a_{n_k}|\geq \varepsilon.$$

On en déduirait que $\big(\cos(n_k\bullet),\ k\geq 1\big)$ converge $\lambda$-presque partout sur $B$ vers 0, donc que $\displaystyle\int_B \cos^2(n_k x)\,\lambda(dx) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ d'après le théorème de convergence dominée, ce qui prouverait que $\lambda(B)=0$ d'après la question précédente, ce qui est absurde.