Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IFP **Année 2002-03**

Corrigé du devoir 2

On représente les suites infinies de tirages à pile ou face comme les éléments de l'ensemble

$$\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit π_n la fonction sur Ω à valeurs dans $\{0,1\}$ définie par $\pi_n(\omega) = \omega(n)$; cette fonction représente le résultat du n-ième tirage.

Soit p un réel fixé appartenant à $]0,1[$. On veut construire une tribu $\mathcal{F}$ sur Ω rendant les fonctions π_n mesurables, et une probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{F})$ telle que pour tout $n \geq 1$,

$$\mathsf{P}\{\pi_n = 1\} = p, \quad \mathsf{P}\{\pi_n = 0\} = 1 - p.$$

Question 1. Soit $\mathcal{G}$ une tribu sur Ω. Montrer que π_n est $\mathcal{G}$-$\mathcal{P}(\{0,1\})$ mesurable si et seulement si les ensembles $\{\pi_n = 1\}$ et $\{\pi_n = 0\}$ appartiennent à $\mathcal{G}$. La réunion $\bigcup_{n\geq 1} \pi_n^{-1}\big(\mathcal{P}(\{0,1\})\big)$ est-elle une tribu ?

Réponse. On suppose les π_n $\mathcal{G}$-$\mathcal{P}(\{0,1\})$ mesurables. La tribu $\mathcal{P}(\{0,1\})$ contient les singletons $\{0\}$ et $\{1\}$, donc nécessairement $\mathcal{G}$ contient $\pi_n^{-1}(\{0\})$ et $\pi_n^{-1}(\{1\})$, autrement dit $\{\pi_n = 0\}$ et $\{\pi_n = 1\}$ appartiennent à $\mathcal{G}$.

Réciproquement, supposons que $\{\pi_n = 0\}$ et $\{\pi_n = 1\}$ appartiennent à $\mathcal{G}$. La tribu $\mathcal{P}(\{0,1\})$ étant égale à $\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$, pour établir la mesurabilité de π_n souhaitée, il suffit alors de vérifier que $\pi_n^{-1}(\emptyset)$ et $\pi_n^{-1}(\{0,1\})$ appartiennent à $\mathcal{G}$, ce qui est immédiat, car le premier ensemble vaut $\emptyset$, et le second Ω.

La réunion $\bigcup_{n\geq 1} \pi_n^{-1}\big(\mathcal{P}(\{0,1\})\big)$ n'est pas une tribu. En effet, elle n'est pas stable par intersection finie ; par exemple, $\pi_1^{-1}(\{0\}) \cap \pi_2^{-1}(\{0\}) = \{0\} \times \{0\} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}^*\setminus\{1,2\}}$ qui n'est pas de la forme $\pi_n^{-1}(A)$ pour $n \geq 1$ et $A \subset \{0,1\}$.

Question 2. Posons $\Omega_n = \{0,1\}^n$ et $\Omega^{(n)} = \{0,1\}^{\mathbb{N}^*\setminus\{1,\dots,n\}}$ de sorte que $\Omega = \Omega_n \times \Omega^{(n)}$. Soit f_n la fonction de Ω dans Ω_n définie par $f_n(\omega) = \big(\pi_1(\omega), \dots, \pi_n(\omega)\big)$ et soit $\mathcal{F}_n = f_n^{-1}\big(\mathcal{P}(\Omega_n)\big)$. Montrer que :

a) $\mathcal{F}_n$ est une tribu,

b) $\mathcal{F}_n = \{A \times \Omega^{(n)}, A \subset \Omega_n\}$,

c) les fonctions $\pi_1, \dots, \pi_n$ sont $\mathcal{F}_n$-$\mathcal{P}(\{0,1\})$ mesurables.

Réponse.

a) L'ensemble $\mathcal{F}_n$ est l'image réciproque de $\mathcal{P}(\Omega_n)$, tribu sur Ω_n, par l'application f_n. C'est donc une tribu sur Ω.

b) Soit $C \subset \Omega$, alors

$$\begin{aligned} C \in \mathcal{F}_n &\iff \exists\, A \subset \Omega_n\,; \quad C = f_n^{-1}(A) \\ &\iff \exists\, A \subset \Omega_n\,; \quad C = \{\omega \in \Omega; (\pi_1(\omega), \ldots, \pi_n(\omega)) \in A\} \\ &\iff \exists\, A \subset \Omega_n\,; \quad C = \{\omega \in \Omega; (\omega(1), \ldots, \omega(n)) \in A\} \\ &\iff \exists\, A \subset \Omega_n\,; \quad C = A \times \Omega^{(n)}. \end{aligned}$$

La tribu $\mathcal{F}_n$ est donc égale à $\{A \times \Omega^{(n)}, A \subset \Omega_n\}$.

c) Pour $k \in \{1, \ldots, n\}$ et $u \in \{0, 1\}$, posons

$$C_{k,u} = \Omega_{k-1} \times \underbrace{\{u\}}_{k\text{-ième rang}} \times \{0,1\}^{\{k+1,\ldots,n\}}.$$

L'ensemble $C_{k,u}$ est évidemment une partie de Ω_n et $\{\pi_k = u\}$ vaut $f_n^{-1}(C_{k,u})$, donc $\{\pi_k = u\} \in \mathcal{F}_n$, pour $u \in \{0, 1\}$. Ainsi, d'après la question 1), l'application π_k est $\mathcal{F}_n$-$\mathcal{P}(\{0, 1\})$ mesurable, et ce pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Question 3. Pour tout $C \in \mathcal{F}_n$, on pose

$$\mathsf{P}_n(C) = \sum_{x \in f_n(C)} p^{|x|}(1-p)^{n-|x|},$$

où $|x|$ désigne le nombre de coordonnées de x égales à 1. Montrer que P_n est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F}_n)$ et que pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, on a $\mathsf{P}_n\{\pi_k = 1\} = p$.

Réponse. Montrons que la fonction d'ensembles P_n définie sur $\mathcal{F}_n$ est une probabilité.

– $\mathsf{P}_n(\emptyset) = \sum_{x \in \emptyset} p^{|x|}(1-p)^{n-|x|} = 0.$

– Soit $(C_k)_{k \geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{F}_n$ disjoints deux à deux. D'après 2.b), il existe une suite $(A_k)_{k \geq 1}$de parties de Ω_n telles que $C_k = A_k \times \Omega^{(n)}$ pour tout $k \geq 1$. La disjonction des C_k entraîne celle des A_k et par ailleurs, $f_n(C_k) = A_k$. Les $f_n(C_k)$, $k \geq 1$, forment donc une suite de parties de Ω_n disjointes deux à deux. Les sommes écrites ci-dessous sont donc des sommes finies et on a sachant que $f_n\big(\bigcup_{k \geq 1} C_k\big) = \bigcup_{k \geq 1} f_n\big(C_k\big)$,

$$\begin{aligned} \mathsf{P}_n\big(\bigcup_{k \geq 1} C_k\big) &= \sum_{x \in \bigcup_{k \geq 1} f_n(C_k)} p^{|x|}(1-p)^{n-|x|} \\ &= \sum_{k \geq 1} \sum_{x \in f_n(C_k)} p^{|x|}(1-p)^{n-|x|} \\ &= \sum_{k \geq 1} \mathsf{P}_n(C_k). \end{aligned}$$

P_n est donc σ-additive.

– P_n est d'après les deux points précédents une mesure, il nous reste à montrer que $\mathsf{P}_n(\Omega) = 1$.

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}_n(\Omega) &= \sum_{x\in f_n(\Omega)} p^{|x|}(1-p)^{n-|x|} \\
&= \sum_{x\in\Omega_n} p^{|x|}(1-p)^{n-|x|} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{x\in\Omega_n;|x|=k} p^k(1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k(1-p)^{n-k} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Le passage de la deuxième à la troisième ligne se justifie en disant que l'on fait une partition de Ω_n selon le nombre k de coordonnées de x égales à 1.
Le passage de la troisième à la quatrième ligne s'obtient en calculant le cardinal de chaque élément de cette partition, autrement dit en comptant le nombre d'éléments de $\{0,1\}^n$ ayant exactement k coordonnées égales à 1 : il y en a C_n^k.

En résumé, P_n est donc bien une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F}_n)$.

Calculons maintenant $\mathsf{P}_n\{\pi_k = 1\}$, pour $k \in \{1,\ldots,n\}$. D'après la réponse à la question 2.c), on sait que

$$\{\pi_k = 1\} = f_n^{-1}\big(\Omega_{k-1} \times \underbrace{\{1\}}_{k\text{-ième rang}} \times \{0,1\}^{\{k+1,\ldots,n\}}\big).$$

Cette remarque nous permet d'écrire

$$\mathsf{P}_n\{\pi_k = 1\} = \sum_{x\in\Omega_{k-1}\times\{1\}\times\{0,1\}^{\{k+1,\ldots,n\}}} p^{|x|}(1-p)^{n-|x|}. \tag{1}$$

Posons $\check{x} = (\pi_1(x),\ldots,\pi_{k-1}(x),\pi_{k+1}(x),\ldots,\pi_n(x))$. On a alors $x \in \Omega_{k-1} \times \{1\} \times \{0,1\}^{\{k+1,\ldots,n\}}$ si et seulement si $\check{x} \in \Omega_{n-1}$, et $|\check{x}| = |x| - 1$. On peut donc réécrire (1) de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}_n(\pi_k = 1) &= \sum_{\check{x}\in\Omega_{n-1}} p^{|\check{x}|+1}(1-p)^{n-(|\check{x}|+1)} \\
&= p\sum_{\check{x}\in\Omega_{n-1}} p^{|\check{x}|}(1-p)^{(n-1)-|\check{x}|} \\
&= p \times \mathsf{P}_{n-1}(\Omega) \\
&= p.
\end{aligned}$$

Question 4. Montrer que la suite $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ est croissante. En déduire que $\underset{n\geq 1}{\cup} \mathcal{F}_n$ est une semi-algèbre sur Ω que l'on notera $\mathcal{C}$ dans la suite du problème.

Réponse. Pour établir la monotonie de la suite $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$, on utilise le résultat 2.b) :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_n &= \{A \times \Omega^{(n)}, A \subset \Omega_n\}\\ &= \{A \times \{0,1\} \times \Omega^{(n+1)}, A \subset \Omega_n\}\\ &\subset \mathcal{F}_{n+1},\end{aligned}$$

puisque $A \times \{0,1\} \subset \Omega_{n+1}$ dès que $A \subset \Omega_n$.

Avant de montrer à proprement parler que $\mathcal{C} = \underset{n\geq 1}{\cup} \mathcal{F}_n$ est une semi-algèbre, nous allons faire la remarque suivante : $\mathcal{C}$ contient $\emptyset$ et Ω (chaque $\mathcal{F}_n$ les contient), et est stable par intersection finie, union finie, passage au complémentaire. En effet, dès que l'on prend un nombre **fini** d'éléments de $\mathcal{C}$, on peut trouver $n_0 \geq 1$ tel que **tous** ces éléments de $\mathcal{C}$ soient dans la **même** tribu $\mathcal{F}_{n_0}$. A partir de là, les trois propriétés énoncées ci-dessus sont immédiates.
Toutes les propriétés qui définissent une semi-algèbre sont alors vérifiées, grâce à cette remarque.

Question 5. Soit P la fonction d'ensemble sur $\mathcal{C}$ définie par

$$\mathsf{P}(C) = \mathsf{P}_n(C) \text{ si } C \in \mathcal{F}_n.$$

Montrer que :

a) P est bien définie (vérifier que P_n et P_{n+1} coïncident sur $\mathcal{F}_n$),

b) P est additive sur $\mathcal{C}$,

c) $\mathsf{P}(\Omega) = 1$ et $\mathsf{P}(\emptyset) = 0$.

Réponse. On souhaite établir *in fine* que P se prolonge en une probabilité sur $(\Omega, \sigma(\mathcal{C}))$, et pour cela on utilisera le théorème d'extension du cours. Toutes les questions qui suivent, celle-ci comprise, ont pour but de vérifier les hypothèses de ce théorème.

a) La définition de P est ambigüe : si $C \in \mathcal{F}_n$, on sait qu'alors (croissance des $\mathcal{F}_n$) C est également dans $\mathcal{F}_{n+1}$. Ceci entraîne que l'on aurait $\mathsf{P}(C) = \mathsf{P}_n(C)$ et $\mathsf{P}(C) = \mathsf{P}_{n+1}(C)$. Il s'agit donc de vérifier que pour tout $C \in \mathcal{F}_n$,

$$\mathsf{P}_n(C) = \mathsf{P}_{n+1}(C).$$

D'après 2.b), $C \in \mathcal{F}_n$ entraîne qu'il existe $A \subset \Omega_n$ telle que $C = A \times \Omega^{(n)}$. Alors $f_{n+1}(C) = A \times \{0,1\} = (A \times \{0\}) \cup (A \times \{1\})$. Ceci justifie l'égalité suivante :

$$\mathsf{P}_{n+1}(C) = \sum_{x \in A\times\{0\}} p^{|x|}(1-p)^{(n+1)-|x|} + \sum_{x \in A\times\{1\}} p^{|x|}(1-p)^{(n+1)-|x|}.$$

En remarquant que, si $\tilde{x}$ désigne $(x(1), \ldots, x(n))$, $x \in A \times \{0\}$ équivaut à ($\tilde{x} \in A$ et $|\tilde{x}| = |x|$), de même que $x \in A \times \{1\}$ équivaut à ($\tilde{x} \in A$ et $|\tilde{x}| = |x| - 1$), on peut écrire

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}_{n+1}(C) &= \sum_{\tilde{x} \in A} p^{|\tilde{x}|}(1-p)^{(n+1)-|\tilde{x}|} + \sum_{\tilde{x} \in A} p^{|\tilde{x}|+1}(1-p)^{(n+1)-(|\tilde{x}|+1)} \\
&= (1-p) \sum_{\tilde{x} \in A} p^{|\tilde{x}|}(1-p)^{n-|\tilde{x}|} + p \sum_{\tilde{x} \in A} p^{|\tilde{x}|}(1-p)^{n-|\tilde{x}|} \\
&= \sum_{\tilde{x} \in A} p^{|\tilde{x}|}(1-p)^{n-|\tilde{x}|} \\
&= \mathsf{P}_n(C).
\end{aligned}$$

La fonction d'ensembles P est donc bien définie.

b) Considérons n éléments disjoints deux à deux de $\mathcal{C}$ notés $C_1, \ldots, C_n$. Chaque C_i est alors dans un certain $\mathcal{F}_{n_i}$. La suite des tribus $\mathcal{F}_n$ étant croissante, tous les C_i appartiennent à $\mathcal{F}_m$ dès que m est supérieur ou égal $\max\limits_{1 \leq i \leq n} n_i$.

A partir de là, on n'a même pas besoin de supposer que $\bigcup\limits_{i=1}^{n} C_i$ est dans $\mathcal{C}$ car la tribu $\mathcal{F}_m$ est stable par union finie. De même, en se servant du fait que P_m est une mesure sur $\mathcal{F}_m$, on obtient immédiatement les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} C_i\Big) &= \mathsf{P}_m\Big(\bigcup_{i=1}^{n} C_i\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}_m(C_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(C_i)
\end{aligned}$$

P est donc bien additive sur $\mathcal{C}$.

c) Les ensembles Ω et $\emptyset$ étant dans $\mathcal{F}_1$ (par exemple), P_1 étant une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F}_1)$, on a $\mathsf{P}(\Omega) = \mathsf{P}_1(\Omega) = 1$ et $\mathsf{P}(\emptyset) = \mathsf{P}_1(\emptyset) = 0$.

Question 6. Soit $(C_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{C}$. On veut établir que si les C_i sont tous non vides, alors

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} C_i \neq \emptyset.$$

Réponse. Avant de commencer à prouver l'existence d'un élément $\bar{\omega}$ dans $\bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}} C_i$, nous allons établir le résultat préliminaire suivant :

Si $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante de parties non vides de Ω, alors pour tout $k \geq 1$,

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \pi_k(B_i) \neq \emptyset.$$

Preuve. Soit $k \geq 1$. Les propriétés de la suite $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ entraînent que la suite $(\pi_k(B_i))_{i\in\mathbb{N}}$ est encore une suite **décroissante** de parties **non vides** de $\{0,1\}$. On distingue alors deux cas :

Premier cas : $\forall i \in \mathbb{N}$, $0 \in \pi_k(B_i)$. Il est alors immédiat que $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} \pi_k(B_i)$ est non vide, puisqu'elle contient 0.

Second cas : $\exists i_0 \in \mathbb{N}$, $0 \notin \pi_k(B_{i_0})$. Par décroissance de la suite, pour tout $i \geq i_0$, 0 ne peut appartenir à $\pi_k(B_i)$. Les ensembles $\pi_k(B_i)$, pour $i \geq i_0$, étant non vides, contiennent donc nécessairement 1. Toujours par monotonie de la suite $(\pi_k(B_i))_{i\in\mathbb{N}}$, si 1 appartient à $\pi_k(B_{i_0})$, il appartient $\pi_k(B_i)$, pour tout $i \in \{0,\ldots,i_0\}$. Au total, 1 appartient à tous les $\pi_k(B_i)$, et donc $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} \pi_k(B_i)$ est non vide.

Fin de la preuve.

Ce résultat établi, nous allons montrer que $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} C_i$ est non vide. Guidés par l'énoncé, il s'agit de montrer dans un premier temps que l'on peut effectivement construire l'élément $\bar\omega$ décrit dans l'énoncé, puis dans un second temps que cet $\bar\omega$ appartient bien à $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} C_i$. Pour ce faire, on introduit la propriété suivante pour un élément ω de Ω :

$$\forall\, i \in \mathbb{N}, \quad C_i \cap f_k^{-1}\big\{\big(\omega(1),\ldots,\omega(k)\big)\big\} \neq \emptyset. \tag{2}$$

(Ici et dans la suite, les parenthèses autour des accolades sont omises pour alléger l'écriture). Construisons par récurrence sur k un élément $\bar\omega$ de Ω vérifiant (2) pour tout $k \geq 1$.

Rang $k = 1$: le résultat préliminaire montre que $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} \pi_1(C_i)$ est non vide. Soit alors $\bar\omega(1) \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \pi_1(C_i)$; pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\bar\omega(1)$ appartient à $\pi_1(C_i)$, ce qui implique $C_i \cap \pi_1^{-1}\big\{\bar\omega(1)\big\} \neq \emptyset$, pour tout $i \in \mathbb{N}$. Comme $f_1 = \pi_1$, nous venons de montrer la condition (2) pour $k = 1$.

Passage du rang k au rang $k+1$: on suppose $\bar\omega(1),\ldots,\bar\omega(k)$ construits et la la condition (2) vraie au rang k. La suite $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$ étant décroissante, celle formée des

$$C_i \cap f_k^{-1}\big\{\big(\bar\omega(1),\ldots,\bar\omega(k)\big)\big\},\ i \in \mathbb{N}$$

l'est encore, et le résultat préliminaire nous permet d'affirmer que

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} \pi_{k+1}\Big(C_i \cap f_k^{-1}\big\{\big(\bar\omega(1),\ldots,\bar\omega(k)\big)\big\}\Big) \neq \emptyset.$$

Ceci justifie que l'on puisse choisir un élément dans cet ensemble, que l'on note $\bar\omega(k+1)$. Ceci nous permet d'enchaîner les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
&\bar\omega(k+1) \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \pi_{k+1}\Big(C_i \cap f_k^{-1}\big\{\big(\bar\omega(1),\dots,\bar\omega(k)\big)\big\}\Big)\\
\iff\ & \forall i\in\mathbb{N},\quad \exists\,\omega_i \in C_i\cap f_k^{-1}\big\{\big(\bar\omega(1),\dots,\bar\omega(k)\big)\big\};\quad \pi_{k+1}(\omega_i)=\bar\omega(k+1)\\
\iff\ & \forall i\in\mathbb{N},\quad \exists\,\omega_i \in C_i;\quad \omega_i(1)=\bar\omega(1),\dots,\omega_i(k)=\bar\omega(k) \text{ et } \omega_i(k+1)=\bar\omega(k+1)\\
\iff\ & \forall i\in\mathbb{N},\quad \exists\,\omega_i \in C_i;\quad \omega_i\in f_{k+1}^{-1}\big\{\big(\bar\omega(1),\dots,\bar\omega(k+1)\big)\big\}\\
\iff\ & \forall i\in\mathbb{N},\quad C_i\cap f_{k+1}^{-1}\big\{\big(\bar\omega(1),\dots,\bar\omega(k+1)\big)\big\}\neq\emptyset.
\end{aligned}$$

La condition (2) est encore vraie au rang $k+1$.
En résumé, on a construit un élément $\bar\omega = (\bar\omega(k))_{k\geq 1}$ de Ω tel que

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad \forall i\in\mathbb{N},\quad C_i\cap f_k^{-1}\Big(\big\{\big(\bar\omega(1),\dots,\bar\omega(k)\big)\big\}\Big)\neq\emptyset.$$

Cette élément $\bar\omega$ vérifie donc bien (2) pour tout $k\geq 1$.

Dans le passage du rang k au rang $k+1$, nous avons justifié l'existence de $\bar\omega(k+1)$. Il nous reste donc à montrer que $\bar\omega$ est bien un élément de $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} C_i$. Or pour tout $i\in\mathbb{N}$, il existe k ($k(i)$ serait plus correct, mais ô combien plus lourd !) tel que $C_i\in\mathcal{F}_k$. L'appartenance de $\bar\omega$ à C_i équivaut alors (voir la réponse à la question 2.b)) à

$$\big(\bar\omega(1),\dots,\bar\omega(k)\big)\in f_k(C_i),$$

soit encore à

$$C_i\cap f_k^{-1}\big\{\big(\bar\omega(1),\dots,\bar\omega(k)\big)\big\}\neq\emptyset,$$

ce qui est vrai puisque $\bar\omega$ vérifie (2) pour tout $k\geq 1$!

Question 7. Montrer que si $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{C}$ tendant vers $\emptyset$, alors

$$\lim_{i\to+\infty}\mathsf{P}(C_i)=0.$$

Réponse. Dire qu'une suite d'ensembles $(C_i)_{i\geq 1}$ décroît vers $\emptyset$ signifie que $\bigcap_{i\geq 1} C_i=\emptyset$. Les C_i étant éléments de $\mathcal{C}$, la question 6) entraîne que l'on a alors nécessairement les C_i tous égaux à $\emptyset$ à partir d'un certain rang. En passant aux probabilités, ceci conduit à $\mathsf{P}(C_i)=0$ à partir du même rang. La stationnarité entraînant la convergence, on a

$$\lim_{i\to+\infty}\mathsf{P}(C_i)=0.$$

Question 8. Montrer que si $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'éléments de $\mathcal{C}$ dont la réunion appartient encore à $\mathcal{C}$, alors

$$\lim_{i\to+\infty}\mathsf{P}(C_i)=\mathsf{P}\big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_i\big).$$

Réponse. Soit $(C_i)_{i\geq 1}$ une suite croissante d'éléments de $\mathcal{C}$, dont l'union appartient encore à $\mathcal{C}$. La propriété que l'on cherche à établir est une propriété de type continuité monotone séquentielle de P, et l'on a déjà établi à la question précédente une propriété de ce type. On va l'utiliser, en construisant à partir de la suite croissante $(C_i)_{i\geq 1}$ une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{C}$ tendant vers $\emptyset$. Pour ce faire, on pose, pour tout $i \geq 1$,

$$D_i = C_i^c \setminus \Big(\bigcap_{i\geq 1} C_i^c\Big) = C_i^c \cap \Big(\bigcup_{i\geq 1} C_i\Big).$$

La suite $(C_i)_{i\geq 1}$ étant croissante, celle des $(C_i^c)_{i\geq 1}$ est décroissante, et du coup celle des $(D_i)_{i\geq 1}$ également. Quelle est la limite de cette dernière suite ?

$$\begin{aligned}
\bigcap_{i\geq 1} D_i &= \bigcap_{i\geq 1} \Big(C_i^c \cap \Big(\bigcup_{i\geq 1} C_i\Big)\Big) \\
&= \Big(\bigcap_{i\geq 1} C_i^c\Big) \cap \Big(\bigcup_{i\geq 1} C_i\Big) \\
&= \Big(\bigcup_{i\geq 1} C_i\Big)^c \cap \Big(\bigcup_{i\geq 1} C_i\Big) \\
&= \emptyset.
\end{aligned}$$

Pour pouvoir appliquer la question 7), il reste à vérifier l'appartenance de D_i à $\mathcal{C}$: par hypothèse, chaque C_i est dans $\mathcal{C}$, ainsi que $\bigcup_{i\geq 1} C_i$. $\mathcal{C}$ étant stable par passage au complémentaire et par intersection finie, on en déduit que $D_i = C_i^c \cap \Big(\bigcup_{i\geq 1} C_i\Big)$ est bien un élément de $\mathcal{C}$. On peut donc écrire $\lim_{i\to+\infty} \mathsf{P}(D_i) = 0$. Mais $\mathsf{P}(D_i) = \mathsf{P}\Big(\bigcup_{i\geq 1} C_i\Big) - \mathsf{P}(C_i)$, il vient donc immédiatement

$$\lim_{i\to+\infty} \mathsf{P}(C_i) = \mathsf{P}\Big(\bigcup_{i\geq 1} C_i\Big).$$

Question 9. Montrer que P est sous-σ-additive sur $\mathcal{C}$.

Réponse. Montrons que P est sous-σ-additive sur $\mathcal{C}$. Soit $(C_i)_{i\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{C}$ telle que l'on ait encore $\bigcup_{i\geq 1} C_i \in \mathcal{C}$. L'idée (classique) consiste à écrire $\bigcup_{i\geq 1} C_i$ comme union d'une suite **croissante** d'éléments de $\mathcal{C}$, et à appliquer la propriété de continuité croissante obtenue sur P à la question 8). On écrit donc

$$\begin{aligned}
\bigcup_{i\geq 1} C_i &= \bigcup_{k\geq 1} \Big(\bigcup_{i=1}^{k} C_i\Big), \\
\mathsf{P}\Big(\bigcup_{i\geq 1} C_i\Big) &= \mathsf{P}\Big(\bigcup_{k\geq 1} \Big(\bigcup_{i=1}^{k} C_i\Big)\Big).
\end{aligned}$$

La suite des $\Big(\bigcup_{i=1}^{k} C_i\Big)_{k\geq 1}$ est une suite évidemment croissante d'éléments de $\mathcal{C}$ (stabilité de $\mathcal{C}$ par union finie), dont la réunion appartient encore à $\mathcal{C}$. On déduit de la question 8) :

$$\mathsf{P}\Big(\bigcup_{i\geq 1} C_i\Big) = \lim_{k\to+\infty} \mathsf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{k} C_i\Big).$$

Par ailleurs, pour tout $k \geq 1$, les $C_i, i \in \{1, \dots, k\}$, et $\overset{k}{\underset{i=1}{\cup}} C_i$, sont des éléments de $\mathcal{C}$, il existe donc n (dépendant de k) tel que ces $k+1$ ensembles soient dans le même $\mathcal{F}_n$. Ceci justifie la première des égalités qui suivent, ainsi que le passage de la quatrième à la cinquième ligne.

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\Big(\overset{k}{\underset{i=1}{\cup}} C_i\Big) &= \mathsf{P}_n\Big(\overset{k}{\underset{i=1}{\cup}} C_i\Big) \\
&= \sum_{x \in f_n(\overset{k}{\underset{i=1}{\cup}} C_i)} p^{|x|}(1-p)^{n-|x|} \\
&= \sum_{x \in \overset{k}{\underset{i=1}{\cup}} f_n(C_i)} p^{|x|}(1-p)^{n-|x|} \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} \sum_{x \in f_n(C_i)} p^{|x|}(1-p)^{n-|x|} \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} \mathsf{P}_n(C_i) \\
\mathsf{P}\Big(\overset{k}{\underset{i=1}{\cup}} C_i\Big) &\leq \sum_{i=1}^{k} \mathsf{P}(C_i).
\end{aligned}$$

On passe à la limite en k dans cette dernière inégalité. Le terme de gauche tend vers $\mathsf{P}\Big(\underset{i\geq 1}{\cup} C_i\Big)$, nous l'avons établi. Le terme de droite, quant à lui, admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ (série de terme général positif). On obtient donc au total la sous-σ-additivité de P :

$$\mathsf{P}\Big(\underset{i\geq 1}{\cup} C_i\Big) \leq \sum_{i\geq 1} \mathsf{P}(C_i).$$

Question 10. Conclure en appliquant le théorème d'extension du cours.

Réponse. Nous allons appliquer le théorème d'extension du cours (théorème 31, chapitre 1). D'après 5.c), $\mathsf{P}(\emptyset) = 0$, d'après 5.b), P est additive sur $\mathcal{C}$, et enfin, d'après 9), P est sous-σ-additive sur $\mathcal{C}$. Toutes les hypothèses du théorème d'extension sont donc vérifiées : P se prolonge en une probabilité (car $\mathsf{P}(\Omega) = 1$, d'après 5.c)) sur $\sigma(\mathcal{C})$.