Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IFP **Année 2002-03**

Corrigé du Devoir n° 1

Ex 1. *Contrôleur contre fraudeur*

Une compagnie de métro pratique les tarifs suivants. Le ticket donnant droit à un trajet coûte 1 € ; les amendes sont fixées à 20 € pour la première infraction constatée, 40 € pour la deuxième et 400 € pour la troisième. La probabilité p pour un voyageur d'être contrôlé au cours d'un trajet est supposée constante et connue de la seule compagnie. Un fraudeur décide de prendre systématiquement le métro sans payer jusqu'à la deuxième amende et d'arrêter alors de frauder. On note T le nombre de trajets effectués jusqu'à la deuxième amende (T est le numéro du trajet où le fraudeur est contrôlé pour la deuxième fois). On note $q = 1 - p$ la probabilité de faire un trajet sans contrôle.

1) Pour $1 \leq j < k$, notons $E_{j,k}$ l'évènement : « le premier contrôle du fraudeur a lieu lors de son j-ème trajet et le deuxième contrôle lors du k-ième trajet ». On a clairement la décomposition en union disjointe

$$\forall k \geq 2, \quad \{T = k\} = \bigcup_{j=1}^{k-1} E_{j,k}. \tag{1}$$

Par additivité de la probabilité, le calcul de $\mathbf{P}(T = k)$ se ramène donc à celui des $\mathbf{P}(E_{j,k})$. Notons F_i l'évènement « le fraudeur n'est pas contrôlé lors de son i-ème trajet ». Son complémentaire F_i^c est donc l'évènement « le fraudeur est contrôlé lors de son i-ème trajet ». L'évènement $E_{j,k}$ peut s'écrire sous la forme

$$E_{j,k} = F_j^c \cap F_k^c \cap \Big(\bigcap_{\substack{1 \leq i < k \\ i \neq j}} F_i \Big),$$

avec le cas particulier $E_{1,2} = F_1^c \cap F_2^c$. Nous faisons maintenant l'hypothèse d'indépendance[1] de la suite d'évènements $(F_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$. Alors les k évènements F_i ($i \neq j, k$) et F_j^c, F_k^c sont mutuellement indépendants (cf. par exemple [ICP], Prop. 2.12) et

$$\mathbf{P}(E_{j,k}) = \mathbf{P}(F_j^c)\mathbf{P}(F_k^c) \prod_{\substack{1 \leq i < k \\ i \neq j}} \mathbf{P}(F_i) = p^2 q^{k-2}.$$

[1] Cette hypothèse revient pratiquement à dire que les contrôles sont faits au hasard, sans tenir compte des résultats des contrôles précédents. Elle ne serait pas pertinente si par exemple, le fraudeur était pris en filature par un contrôleur particulièrement hargneux et décidé à le coincer.

On note au passage que $\mathbf{P}(E_{j,k})$ ne dépend pas de j. En utilisant l'additivité de $\mathbf{P}$ et (1), on aboutit à :

$$\forall k \geq 2, \quad \mathbf{P}(T = k) = \sum_{j=1}^{k-1} \mathbf{P}(E_{j,k}) = (k-1)p^2 q^{k-2}.$$

La variable aléatoire T suit ainsi la loi binomiale négative de paramètres 2 et p. C'est la loi du temps d'attente du deuxième succès (ici pour le contrôleur !) dans une suite d'épreuves répétées indépendantes.

2) La probabilité $\mathbf{P}(T > n)$ s'exprime à l'aide des $\mathbf{P}(T = k)$ par σ-additivité :

$$\mathbf{P}(T > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbf{P}(T = k) = p^2 \sum_{k=n+1}^{+\infty} (k-1)q^{k-2}.$$

On voit ainsi que

$$\mathbf{P}(T > n) = p^2 f_n'(q), \tag{2}$$

où la fonction f_n est définie comme la somme de la série entière

$$f_n(x) := \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^{k-1}.$$

Cette série est une série géométrique de raison x, donc de rayon de convergence $R = 1$. On sait alors que sa somme est dérivable sur l'intervalle $]-R, R[$ et que sa dérivée peut se calculer par dérivation terme à terme :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f_n'(x) := \sum_{k=n+1}^{+\infty} (k-1)x^{k-2}.$$

Comme $0 < p < 1$ (sinon le problème est sans intérêt), $q := 1 - p$ est aussi dans l'intervalle $]0, 1[$ et on peut appliquer l'égalité ci-dessus avec $x = q$. Par ailleurs, on peut calculer explicitement $f_n(x)$ comme somme d'une série géométrique :

$$f_n(x) = x^n + x^{n+1} + x^{n+2} + \dots \cdots = x^n \sum_{j=0}^{+\infty} x^j = \frac{x^n}{1-x},$$

formule valable pour tout $x \in]-1, 1[$. On en déduit une formule explicite pour la dérivée :

$$f_n'(x) = \frac{(1-x)nx^{n-1} + x^n}{(1-x)^2} = \frac{(n-(n-1)x)x^{n-1}}{(1-x)^2}.$$

En faisant $x = q$ (donc $1 - x = p$) et en reportant ce résultat dans (2), il vient :

$$\mathbf{P}(T > n) = (n-(n-1)q)q^{n-1} = (np+q)q^{n-1}.$$

3) Le bilan financier de la stratégie du fraudeur est la variable aléatoire $S := T - 60$. En effet lorsqu'il arrête de frauder après son deuxième contrôle, il a dépensé en tout 60 € d'amende et gagné T € en ne payant pas ses tickets de métro. La probabilité que sa stratégie soit bénéficiaire est donc $\mathbf{P}(S > 0) = \mathbf{P}(T > 60)$.

Le calcul numérique donne

$$\mathbf{P}(T > 60) \simeq \begin{cases} 0{,}013\,8 & \text{pour } p = 1/10; \\ 0{,}191\,6 & \text{pour } p = 1/20. \end{cases}$$

4) D'un point de vue financier, le fraudeur a intérêt à avoir une idée de la valeur de p. Entre les deux exemples ci-dessus, la division par 2 de la probabilité de contrôle multiplie par presque 14 sa probabilité d'être bénéficaire. Pour diminuer son ignorance de p, le fraudeur peut l'estimer sur la base d'un grand nombre d'observations.

Considérons d'abord le cas du fraudeur « névrotique » : son objectif est de faire un bénéfice, peu lui importe lequel. Dans ce cas, la valeur critique de p est celle pour laquelle $\mathbf{P}(T > 60) = 1/2$, soit approximativement $p \simeq 0{,}028$. En dessous de cette valeur de p, la stratégie du fraudeur lui donne plus d'une chance sur deux d'être bénéficiaire.

Voyons maintenant le cas plus réaliste du fraudeur « économique » : ce qui lui importe n'est pas tant la probabilité de faire un bénéfice, même minime, que le gain moyen qu'il peut espérer de sa stratégie. Pour lui, la quantité pertinente est non plus $\mathbf{P}(T > 60)$, mais $\mathbf{E}(T - 60) = \mathbf{E}T - 60$. Un calcul simple (laissé en exercice) montre que $\mathbf{E}T = 2/p$. La valeur critique de p en dessous de laquelle sa stratégie est gagnante « en moyenne » est alors donnée par l'équation $2/p = 60$, c'est $p = 1/30 \simeq 0{,}033\,3$. Notons que pour cette valeur de p, $\mathbf{P}(T > 60) \simeq 0{,}401\,5$, ce qui montre bien que la prise en compte du montant des gains peut conduire à considérer comme gagnante une stratégie qui a moins d'une chance sur deux de générer un bénéfice.

N.B. L'auteur de l'énoncé *Contrôleur contre fraudeur* et de son corrigé récuse par avance toute accusation d'incitation à la fraude et décline toute responsabilité en cas de fraude de l'un de ses lecteurs. Il fait observer que des calculs du type ci-dessus[2] sont utiles à la compagnie de métro qui en a besoin pour déterminer le nombre de contrôleurs qu'elle doit employer (avec le coût salarial que cela implique)...

Ex 2. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $p_k := \mathbf{P}(X = k)$. On suppose que X a une espérance mathématique $\mathbf{E}X$ finie et que la suite $(p_k)_{k\geq 1}$ est *décroissante* sur $\mathbb{N}^*$.

1) On se propose de démontrer l'inégalité :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad p_k < \frac{2\mathbf{E}X}{k^2}. \tag{3}$$

Remarquons en préalable que X étant à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, $X \geq 1$ d'où $\mathbf{E}X \geq 1$. Par conséquent l'espérance de X n'est pas nulle et le second membre de (3) est toujours

[2]Notamment le cas du fraudeur « économique », en raison de la loi des grands nombres.

strictement positif. Ainsi (3) est trivialement vérifiée pour tout[3] k tel que $p_k = 0$. Il nous suffit donc de prouver l'inégalité stricte (3) pour k tel que $p_k > 0$. Cette inégalité résulte des minorations suivantes dont la justification est différée un instant :

$$\mathbf{E}X = \sum_{j=1}^{+\infty} jp_j \geq \sum_{j=1}^{k} jp_j \geq p_k \sum_{j=1}^{k} j = p_k \frac{k(k+1)}{2} > p_k \frac{k^2}{2}. \tag{4}$$

En oubliant les étapes intermédiaires et en lisant (4) de droite à gauche, on a bien $p_k k^2/2 < \mathbf{E}X$, ce qui nous donne (3). Voyons maintenant les justifications de gauche à droite dans (4).

- La première égalité est simplement la définition de $\mathbf{E}X$ au sens du cours de DEUG, sinon (du point de vue de la Licence) c'est la formule de calcul de l'espérance d'une variable aléatoire discrète.
- L'inégalité suivante est la minoration de la somme d'une série à termes *positifs* par sa somme partielle de rang k. Ceci est bien légitime puisque dans ce cas, la suite des sommes partielles est croissante et a pour limite la somme de la série.
- L'inégalité suivante repose sur la décroissance de la suite (p_n) : pour $1 \leq j \leq k$, $p_j \geq p_k$.
- L'égalité suivante est simplement le calcul classique de la somme des termes d'une progression arithmétique[4].
- La dernière inégalité vient de la minoration $k(k+1) > k^2$ pour $k \geq 1$ *et* de la *stricte* positivité de p_k.

2) L'inégalité (3) ne reste pas vraie sans l'hypothèse de décroissance de $(p_k)_{k\geq 1}$. On n'a que l'embarras du choix des contre-exemples. En voici un simple. On choisit X prenant seulement les deux valeurs 1 et 3, chacune avec probabilité $\frac{1}{2}$. La loi de X est $P_X = \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_3$ et la suite (p_n) n'est pas décroissante ($p_2 = 0 < p_3 = \frac{1}{2}$). Clairement $\mathbf{E}X = 2$ et (3) est en défaut pour $k = 3$:

$$\frac{2\mathbf{E}X}{3^2} = \frac{4}{9} < \frac{1}{2} = \mathbf{P}(X = 3).$$

3) Supposons qu'il existe une constante $c > 0$ et un entier k_0 tels que :

$$\forall k \geq k_0, \quad \mathbf{P}(X = k) \geq \frac{c\mathbf{E}X}{k^2}. \tag{5}$$

La variable aléatoire X ayant une espérance finie, la série de terme général $k\mathbf{P}(X = k)$ converge, ce qui implique :

$$\sum_{k=k_0}^{+\infty} k\mathbf{P}(X = k) < +\infty. \tag{6}$$

[3]Remarquons au passage que s'il existe un tel k, alors pour tout $j \geq k$, $p_j = 0$ par décroissance de la suite de réels positifs (p_n).

[4]Rappel : la somme de termes consécutifs d'une progression arithmétique est égale au nombre de termes multiplié par la moyenne du premier et du dernier terme.

Or d'après (5), pour $k \geq k_0$, $k\mathbf{P}(X = k)$ est *minoré* par $c\mathbf{E}X/k$, qui est le terme général d'une série divergente (rappelons que $\mathbf{E}X > 0$). L'inégalité (5) est donc contradictoire avec notre hypothèse générale de finitude de $\mathbf{E}X$. Notons au passage que cette impossibilité de (5) concerne toutes les variables aléatoires X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et d'espérance finie, que la suite (p_n) soit ou non décroissante.

Deux questions auxquelles vous avez échappé.

4) Est-ce que 2 est la meilleure constante dans l'inégalité (3) ? Dire que 2 est la meilleure constante signifie ici que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une variable aléatoire X_ε vérifiant les hypothèses de l'énoncé et telle que pour au moins un $k \in \mathbb{N}^*$, $p_k \geq (2-\varepsilon)\mathbf{E}X_\varepsilon/k^2$.

5) Lorsque k tend vers l'infini, (3) nous donne l'estimation $p_k = O(k^{-2})$ pour la vitesse de convergence vers zéro de p_k. Peut-on améliorer cette estimation ?

Des réponses sont proposées à la fin de ce corrigé. Ne les regardez pas tout de suite, essayez d'abord par vous même...

Ex 3. *Sommabilité...*

Soit E un espace vectoriel normé, I un ensemble infini d'indices et $\{u_i,\ i \in I\}$ une famille de vecteurs de E. Pour toute partie finie K de I on note

$$S_K := \sum_{i \in K} u_i.$$

On dit que $\{u_i,\ i \in I\}$ est *intrinsèquement sommable* et de somme $S \in E$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists J \text{ partie finie de } I;\ \forall K \text{ fini},\quad J \subset K \subset I \quad \Rightarrow \quad \|S - S_K\| \leq \varepsilon. \tag{7}$$

Remarque préliminaire : si $\{u_i,\ i \in I\}$ est intrinsèquement sommable, sa somme S est unique, c'est-à-dire que si les vecteurs S et S' vérifient tous les deux (7), alors $S = S'$. Bien sûr, l'ensemble fini « J » associé à S' par (7) n'a aucune raison d'être le même que pour S, nous le noterons donc plutôt J'. Pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble fini $K = J \cup J'$ contient à la fois J et J', donc $\|S - S_K\| \leq \varepsilon$ et $\|S' - S_K\| \leq \varepsilon$. Par inégalité triangulaire, $\|S - S'\| \leq 2\varepsilon$. Dans cette dernière inégalité, K qui dépendait de ε a disparu et le premier membre ne dépend pas de ε. L'inégalité étant vraie pour tout $\varepsilon > 0$, $\|S - S'\| = 0$ et $S = S'$.

1) Soit $\{u_i,\ i \in I\}$ intrinsèquement sommable et $I' := \{i \in I;\ u_i \neq 0\}$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, fixons l'un[5] des ensembles finis J donnés par (7) lorsque $\varepsilon = 1/n$ et notons le J_n. Posons

$$H := \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} J_n.$$

L'ensemble H est au plus dénombrable comme réunion dénombrable d'ensembles au plus dénombrables. Si $H = I$, alors I' est inclus dans H et donc au plus dénombrable. En dehors de ce cas trivial, $I \setminus H$ n'est pas vide. Soit i_0 un élément quelconque de $I \setminus H$.

[5] La propriété (7) nous assure qu'il existe au moins un J pour ε donné, mais ne dit rien sur l'unicité.

En appliquant (7) avec $\varepsilon = 1/n$, $J = J_n$ et chacun des deux ensembles finis $K = J_n$, $K' = J_n \cup \{i_0\}$, on obtient les deux inégalités :

$$\|S_{J_n} - S\| \leq \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \|u_{i_0} + S_{J_n} - S\| \leq \frac{1}{n},$$

vraies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En écrivant $u_{i_0} = (u_{i_0} + S_{J_n} - S) + (S - S_{J_n})$, l'inégalité triangulaire nous donne

$$\forall n \geq 1, \quad \|u_{i_0}\| \leq \frac{2}{n}.$$

Faisant tendre n vers l'infini (noter que i_0 est fixé et ne dépend pas de n), on en déduit $\|u_{i_0}\| = 0$, d'où $u_{i_0} = 0$. Ce raisonnement étant valable pour n'importe quel $i_0 \in I \setminus H$, on en déduit que I' est inclus dans H. Par conséquent, I' est au plus dénombrable.

2) Soit $\{u_i,\ i \in I\}$ intrinsèquement sommable. D'après la remarque préliminaire, sa somme S est unique et ne dépend que de $\{u_i,\ i \in I\}$. Supposons de plus que I' défini ci-dessus est infini. Il est alors dénombrable. Notons φ une bijection quelconque $\mathbb{N} \to I'$. Nous voulons montrer que $\sum_{k=0}^{+\infty} u_{\varphi(k)}$ converge et que sa somme ne dépend pas de φ. Ce résultat sera acquis si nous montrons que cette série converge vers S, puisque S ne dépend pas de φ.

Avec les notations utilisées à la question précédente, I' est inclus dans l'union des ensembles finis J_n. Posons alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $J'_n := J_n \cap I'$. Ainsi pour tout $i \in J_n \setminus J'_n$, $u_i = 0$. Il en résulte que la suite $(J'_n)_{n \geq 1}$ vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall K' \text{ fini tel que } J'_n \subset K' \subset I', \quad \|S - S_{K'}\| \leq \frac{1}{n}. \tag{8}$$

En effet en posant $K = K' \cup (J_n \setminus J'_n)$, on a un ensemble fini tel que $J_n \subset K \subset I$ et donc $\|S_K - S\| \leq 1/n$. Or $S_K = S_{K'}$ puisque les termes u_i de $S_K - S_{K'}$ ont tous un indice $i \in J_n \setminus J'_n$ donc sont nuls.

Puisque φ est une bijection de $\mathbb{N}$ *sur* I' et J'_n une partie finie de I', il existe pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ un entier $k_0(n)$ tel que

$$\varphi\big(\{0, 1, 2, \dots, k_0(n)\}\big) \supset J'_n.$$

Il suffit de prendre pour cela, $k_0(n) := \max\{\varphi^{-1}(i);\ i \in J'_n\}$. Alors pour tout entier $l \geq k_0(n)$, $K' := \varphi\big(\{0, 1, 2, \dots, l\}\big)$ est une partie finie de I', contenant J'_n et donc par (8), $\|S - S_{K'}\| \leq 1/n$. Comme $S_{K'} = \sum_{k=0}^{l} u_{\varphi(k)}$, nous venons ainsi d'établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists k_0(n), \quad \forall l \geq k_0(n), \quad \Big\|\sum_{k=0}^{l} u_{\varphi(k)} - S\Big\| \leq \frac{1}{n},$$

ce qui équivaut à la convergence vers S de la série de terme général $u_{\varphi(k)}$ (c'est juste ce que l'on obtient en discrétisant le « $\forall \varepsilon > 0$ » en le remplaçant par $\varepsilon = 1/n$ dans la définition de cette convergence).

3) On se propose de montrer que si I est dénombrable et la série $\sum_{i\in I} u_i$ commutativement convergente et de somme S, alors $\{u_i,\ i\in I\}$ est intrinsèquement sommable et de somme S. Pour cela on raisonne par l'absurde en supposant que $\{u_i\ i\in I\}$ n'est pas intrinsèquement sommable. En toute généralité l'intrinsèque sommabilité s'écrit :

$$\exists S'\in E, \forall\varepsilon>0,\ \exists J \text{ partie finie de } I;\ \forall K \text{ fini},\quad J\subset K\subset I \quad\Rightarrow\quad \|S'-S_K\|\le\varepsilon.$$

La négation de cette propriété s'écrit donc :

$$\forall S'\in E,\ \exists\varepsilon>0,\ \forall J \text{ partie finie de } I,\ \exists K \text{ fini},\quad J\subset K\subset I \text{ et } \|S'-S_K\|>\varepsilon.$$

En particulier pour $S'=S$, nous disposons pour notre raisonnement par l'absurde de l'hypothèse :

$$\exists\varepsilon>0,\ \forall J \text{ partie finie de } I,\ \exists K \text{ fini},\quad J\subset K\subset I \text{ et } \|S-S_K\|>\varepsilon. \tag{9}$$

Fixons une première numérotation bijective $\varphi:\mathbb{N}\to I$. Posons $k_0:=0$ et $J_0:=\{\varphi(0)\}$. Par (9) il existe une partie finie K_0 de I, contenant J_0 et telle que $\|S-S_{K_0}\|>\varepsilon$. On peut maintenant choisir un entier $k_1>k_0$ tel que $J_1:=\varphi\big(\{0,1,\dots,k_1\}\big)$ contienne *strictement* K_0, il suffit pour cela de prendre $k_1=1+\max\{\varphi^{-1}(i);\ i\in K_0\}$. Une nouvelle invocation de (9) nous fournit une partie finie K_1 de I, contenant J_1 et telle que $\|S-S_{K_1}\|>\varepsilon$. Nous venons ainsi d'amorcer une récurrence qui basée sur l'utilisation itérée de (9), nous permet de construire une suite strictement croissante d'entiers (k_n), deux suites (J_n) et (K_n) de parties finies de I, vérifiant :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \varphi\big(\{0,1,\dots,k_n\}\big)=J_n\subset K_n\subsetneqq J_{n+1} \text{ et } \|S-S_{K_n}\|>\varepsilon. \tag{10}$$

Par cette construction, la suite (K_n) est strictement croissante pour l'inclusion. La réunion de cette suite est exactement I. En effet elle est évidememnt incluse dans I puisque chaque K_n est une partie de I. Dans l'autre sens, si i est un élément quelconque de I, $\varphi^{-1}(i)$ est un entier qui est majoré par k_n pour n assez grand (la suite *strictement* croissante *d'entiers* (k_n) tend vers l'infini). Par construction de J_n, l'inégalité $\varphi^{-1}(i)\le k_n$ implique l'appartenance de i à J_n, donc aussi à K_n. Ainsi un élément quelconque i de I appartient toujours à au moins un K_n, donc $I\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}}K_n$ et finalement $I=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}K_n$. Posant maintenant

$$I_0:=K_0\quad\text{et}\quad\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad I_n:=K_n\setminus K_{n-1},$$

il est clair qu'aucun des I_n n'est vide (stricte croissance de (K_n)), qu'ils sont deux à deux disjoints (pour la même raison) et que leur réunion est I. La famille $\{I_n;\ n\in\mathbb{N}\}$ constitue donc une partition de I en sous-ensembles finis. Notons maintenant

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad m_n:=\operatorname{card}K_n-1.$$

Comme (K_n) est strictement croissante pour l'inclusion, la suite d'entiers (m_n) est strictement croissante. On obtient alors une partition $\{A_n;\ n\in\mathbb{N}\}$ de $\mathbb{N}$ en posant :

$$A_0:=\{0,\dots,m_0\},\quad\text{et}\quad\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad A_n:=\{m_{n-1}+1,\dots,m_n\}.$$

Les A_n sont finis, $\operatorname{card} A_0 = m_0$ et pour $n \geq 1$,

$$\operatorname{card} A_n = m_n - m_{n-1} = \operatorname{card} K_n - \operatorname{card} K_{n-1} = \operatorname{card} I_n.$$

Dire qu'A_n et I_n ont même cardinal c'est dire précisément qu'il existe une bijection $\sigma_n : A_n \to I_n$. En « recollant » ces bijections σ_n entre ensembles finis, on construit une application $\sigma : \mathbb{N} \to I$: tout $k \in \mathbb{N}$ appartient à un unique A_n (puisque les A_n partitionnent $\mathbb{N}$) et on pose alors

$$\sigma(k) := \sigma_n(k), \quad (k \in A_n).$$

Vérifions que σ ainsi définie est une bijection. Tout $i \in I$ appartient à un I_n (puisque les I_n partitionnent I). Il a alors pour antécédent par σ l'entier $\sigma_n^{-1}(i) \in A_n$. Ceci montre que chaque $i \in I$ a au moins un antécédent par σ, donc que σ est surjective. Pour vérifier l'injectivité, soient k et l deux entiers distincts. Ou bien ils sont dans le même A_n et alors $\sigma(k) = \sigma_n(k) \neq \sigma_n(l) = \sigma(l)$ par injectivité de σ_n. Ou bien $k \in A_n$ et $l \in A_{n'}$ avec $n \neq n'$. Alors $\sigma(k) \in I_n$ et $\sigma(l) \in I_{n'}$ et comme I_n et $I_{n'}$ sont disjoints, $\sigma(k)$ et $\sigma(l)$ sont forcément distincts. Nous avons finalement construit une suite strictement croissante d'entiers m_n (donc tendant vers l'infini) et une bijection $\sigma : \mathbb{N} \to I$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sigma\bigl(\{0, \dots, m_n\}\bigr) = K_n.$$

Au vu de (10), nous avons ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Bigl\| \sum_{k=0}^{m_n} u_{\sigma(k)} - S \Bigr\| > \varepsilon,$$

ce qui interdit la convergence vers S de la série de terme général $u_{\sigma(k)}$ et contredit l'hypothèse de convergence commutative de $\sum_{i \in I} u_i$. L'obtention de cette contradiction reposant sur la négation de la sommabilité intrinsèque de $\{u_i;\ i \in I\}$, on en déduit que $\{u_i;\ i \in I\}$ est intrinsèquement sommable. Notons S' sa somme. Il reste à vérifier que $S' = S$. Par définition de la sommabilité intrinsèque, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe J_ε, partie finie de I telle que pour toute partie finie $K \supset J_\varepsilon$ de I, $\|S' - S_K\| < \varepsilon$. D'autre part la convergence vers S de la série de terme général $u_{\varphi(k)}$ nous donne un $n_0(\varepsilon)$ tel que pour tout $n \geq n_0(\varepsilon)$, $\| \sum_{k=0}^{n} u_{\varphi(k)} - S\| < \varepsilon$. Comme φ est surjective, il existe un $n_1(\varepsilon) > n_0(\varepsilon)$ tel que $K := \varphi\bigl(\{0, \dots, n_1(\varepsilon)\}\bigr)$ contienne J_ε. On a alors à la fois $\|S' - S_K\| < \varepsilon$ et $\|S - S_K\| < \varepsilon$, d'où par inégalité triangulaire $\|S - S'\| < 2\varepsilon$. Cette dernière inégalité étant vérifiée pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit $\|S - S'\| = 0$ et $S = S'$.

4) Soit $\{u_i,\ i \in I\}$ une famille infinie dans $\mathbb{R}_+$ telle que

$$M := \sup_{K \text{ fini } \subset I} \sum_{i \in K} u_i < +\infty. \tag{11}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme M est *fini*, $M - \varepsilon$ est strictement inférieur à M. Par minimalité du supremum M parmi tous les majorants de l'ensemble $\{S_K;\ K \text{ fini } \subset I\}$, il existe une partie finie J de I telle que

$$M - \varepsilon < S_J \leq M.$$

De plus pour toute partie finie K de I, contenant J,

$$M - \varepsilon < S_J \leq S_K \leq M. \tag{12}$$

En effet, $S_K - S_J = S_{K\setminus J}$ est une somme de réels positifs, donc positive, ce qui justifie la deuxième inégalité dans (12). La troisième découle de la définition de M. Comme (12) implique $|M - S_K| < \varepsilon$, nous avons ainsi établi que $\{u_i,\ i \in I\}$ est intrinsèquement sommable et de somme M.

5) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure finie. On suppose de plus que la tribu $\mathcal{F}$ possède les singletons ($\forall \omega \in \Omega$, $\{\omega\} \in \mathcal{F}$). Alors toute partie *finie* K de Ω appartient aussi à la tribu $\mathcal{F}$ et par additivité et croissance de μ,

$$\mu(K) = \sum_{\omega \in K} \mu(\{\omega\}) \leq \mu(\Omega) < +\infty.$$

Il en résulte que la famille de réels positifs $\{\mu(\omega);\ \omega \in \Omega\}$ vérifie (12) avec $M \leq \mu(\Omega)$ (prendre $I = \Omega$, remplacer i par ω et u_i par $\mu(\{\omega\})$). Elle est donc intrinsèquement sommable et la sous-famille de ses termes non nuls est au plus dénombrable d'après la question 1. L'ensemble des points ω où μ a une masse ponctuelle est donc lui aussi au plus dénombrable. La généralisation au cas où μ est σ-finie est immédiate. En effet, Ω est union d'une suite (A_n) dans $\mathcal{F}$ telle que chaque A_n soit de mesure finie. En remplaçant Ω par A_n dans le raisonnement ci-dessus, on voit que $B_n := \{\omega \in A_n;\ \mu(\{\omega\}) > 0\}$ est au plus dénombrable. Comme $B := \{\omega \in;\ \mu(\{\omega\}) > 0\}$ est évidemment l'union des B_n, il est lui même au plus dénombrable.

6) On déduit de la question précédente que si F est la fonction de répartition d'une mesure finie sur $(\mathbb{R}, \mathrm{Bor}(\mathbb{R}))$, l'ensemble de ses points de sauts (*i.e.* les $a \in \mathbb{R}$ tels que $F(a^-) < F(a)$) est au plus dénombrable. En effet, on sait que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\mu(\{a\}) = F(a) - F(a^-)$. Comme F est croissante continue à droite, ceci permet de caractériser ses points de discontinuité a par la condition $\mu(\{a\}) > 0$.

Il y a bien sûr d'autres démonstrations de ce résultat, voir par exemple le corrigé du D.S. d'IFP de 2001–2002.

Ex 2. *Solution des questions auxquelles vous aviez échappé*

4) La meilleure constante est effectivement 2. Pour construire la loi de X_ε, reprenons la démonstration de l'inégalité (3) en faisant des choix visant à limiter le plus possible la perte due aux minorations dans (4). Voici ce que cela donne :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}X = \sum_{j=1}^{+\infty} jp_j &= \sum_{j=1}^{k} jp_j \qquad (\text{prendre } p_j := 0,\ \forall j > k)\\
&= p_k \sum_{j=1}^{k} j \qquad (\text{ pour } 1 \leq j \leq k, \text{ prendre } p_j := p_k, \text{ donc } p_j = 1/k)\\
&= p_k \frac{k(k+1)}{2}\\
&> p_k \frac{k^2}{2} \qquad (\text{si } k \text{ « grand »}, \frac{k^2}{k(k+1)} \simeq 1).
\end{aligned}$$

Cette suite d'arbitrages nous fournit comme candidate naturelle pour la loi de X_ε, la loi uniforme sur $\{1,\dots,k\}$ avec k assez grand (dépendant de ε). Si X_ε suit cette loi, $p_k = 1/k$ et $\mathbf{E}X_\varepsilon = (k+1)/2$ et l'inégalité $p_k \geq (2-\varepsilon)\mathbf{E}X_\varepsilon/k^2$ sera réalisée dès que

$$\frac{1}{k} \geq (2-\varepsilon)\frac{k+1}{2k^2} \quad \Leftrightarrow \quad k \geq \frac{2}{\varepsilon} - 1.$$

5) On peut améliorer l'estimation $p_k = O(k^{-2})$ donnée par (3) pour la vitesse de convergence vers zéro de p_k en la remplaçant par $p_k = o(k^{-2})$. Ceci signifie que l'on peut écrire $p_k = \varepsilon_k k^{-2}$, la suite (ε_k) tendant vers zéro quand k tend vers l'infini. Pour ce faire, il suffit d'adapter les minorations (4) de la manière suivante. Il est commode de traiter d'abord le cas pair en posant $k = 2l$. On définit

$$\delta_{2l} := \sum_{j=l+1}^{2l} jp_j.$$

Il est clair que δ_{2l} tend vers zéro quand l tend vers l'infini puisque la série de terme général jp_j converge dans $\mathbb{R}_+$ (appliquer le critère de Cauchy, ou majorer par le reste de rang l de la série). Avec les mêmes justifications que pour (4), on a :

$$\delta_{2l} = \sum_{j=l+1}^{2l} jp_j \geq p_k \sum_{j=l+1}^{2l} j = p_k \frac{l(3l+1)}{2} \geq p_k \frac{3l^2}{2} = p_k \frac{3k^2}{8},$$

d'où l'on tire :

$$\forall k \in 2\mathbb{N}^*, \quad p_k \leq \frac{8}{3k^2}\delta_k. \tag{13}$$

Pour $k = 2l+1$ impair, on pose $\delta_{2l+1} := \delta_{2l}$ et on majore p_{2l+1} par $p_{2l} = p_{k-1}$. D'où

$$\forall k \text{ impair et } k \geq 3, \quad p_k \leq \frac{8\delta_k}{3(k-1)^2} = \frac{8\delta_k}{3k^2(1-1/k)^2} \leq \frac{8\delta_k}{3k^2(1-1/3)^2} = \frac{6\delta_k}{k^2}. \tag{14}$$

En posant $\varepsilon_k := k^2 p_k$, les inégalités (13) et (14) montrent que ε_k tend vers zéro quand k tend vers l'infini et on a bien $p_k = \varepsilon_k k^{-2} = o(k^{-2})$.

Remarque. Ce résultat permet de mieux comprendre la question 3. En fait le résultat de la question 3 peut s'écrire (de façon un peu alambiquée) $\liminf_{k\to+\infty} k^2 p_k = 0$, tandis que celui de la question 5 est plus précis puisqu'il s'écrit aussi $\limsup_{k\to+\infty} k^2 p_k = 0$, ou encore $\lim_{k\to+\infty} k^2 p_k = 0$.

Références

[ICP] Ch. Suquet, *Introduction au Calcul des Probabilités*, cours de DEUG, Lille 2001.