Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IFP **Année 2001-2002**

Examen, 4 septembre 2002

Conditions de déroulement de l'épreuve : Durée : 4 heures.
Les calculatrices sont interdites.
Liste exhaustive des documents autorisés :

1. polycopié de DEUG *Introduction au calcul des probabilités*.
2. documents imprimés distribués en *cours* d'IFP ce semestre (à l'exclusion des corrigés de devoirs).
3. une feuille *manuscrite* recto verso format standard A4, pouvant contenir des extraits du cours à votre choix, à l'exclusion de tout corrigé d'exercice.

Le barème n'est donné qu'à titre indicatif pour vous aider à gérer votre temps et n'a pas valeur contractuelle.

Exercice I (*4 points*)

1) On se propose de calculer l'intégrale

$$I := \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2)\,\mathrm{d}x.$$

On note λ_2 la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$. Justifier l'égalité

$$I^2 = \int_{\mathbb{R}^2} \exp\bigl(-(x^2+y^2)\bigr)\,\mathrm{d}\lambda_2(x,y)$$

et calculer cette intégrale double par un changement de variable.

2) Soit α un réel, on pose pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$F_\alpha(x) := \sum_{k=1}^{+\infty} \exp(-k^\alpha x^2).$$

Expliquer brièvement pourquoi cette formule définit une fonction borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

3) Trouver l'ensemble des valeurs de α telles que F_α soit intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue λ_1 sur $\mathbb{R}$.

4) Montrer que pour tout $\alpha > 0$ et tout $x \neq 0$, la série définissant $F_\alpha(x)$ converge dans $\mathbb{R}$ (cette question n'a rien à voir avec la théorie de l'intégration).

Exercice II (*4 points*)

Toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

1) Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$ et $X := \ln U$. Trouver la fonction de répartition et la densité de la variable aléatoire X. Calculer $\mathbf{E}X$.

2) Soit $(U_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi uniforme sur $[0,1]$. On note

$$T_1 = U_1,\ T_2 := \sqrt{U_1U_2}, \ldots\ldots,\ T_n := (U_1U_2\ldots U_n)^{1/n}.$$

En utilisant la loi forte des grands nombres, montrer que T_n converge presque sûrement vers $\exp(\mathbf{E}X)$.

3) En déduire que la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} U_1U_2\ldots U_n$$

converge presque sûrement. *Indication* : on pourra comparer avec une série géométrique en remarquant que $\mathbf{E}X < 0$.

4) Soit S la somme de cette série. Calculer $\mathbf{E}S$ (en justifiant votre réponse).

Exercice III (*6 points*)

Cet exercice propose une autre méthode de calcul de l'intégrale

$$J := \int_{[0,+\infty[} \exp(-t^2)\,\mathrm{d}\lambda_1(t)$$

que celle vue à la première question de l'exercice I (noter que $I = 2J$).

1) Pour tout $x \geq 0$, démontrer que la fonction

$$t \longmapsto \frac{\exp(-xt^2)}{1+t^2}$$

est intégrable (par rapport à la mesure de Lebesgue) sur $[0,+\infty[$.

2) Pour tout $x \geq 0$, on pose

$$G(x) := \int_{[0,+\infty[} \frac{\exp(-xt^2)}{1+t^2}\,\mathrm{d}\lambda_1(t).$$

Démontrer que G est continue sur $[0,+\infty[$ et dérivable sur $]0,+\infty[$.

3) Montrer que $G(0) = \pi/2$ et que $G(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

4) Vérifier que G est solution de l'équation différentielle

$$G'(x) - G(x) = \frac{-J}{\sqrt{x}}, \quad x \in]0,+\infty[.$$

5) On pose $G(x) = H(x)\mathrm{e}^x$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$H(x) = \frac{\pi}{2} - 2J\int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u.$$

6) En déduire que $J = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Problème (*8 points*)

Le but du problème est de montrer que si tous les coefficients de Fourier d'une fonction de $\mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ sont nuls, cette fonction est nulle. On rappelle d'abord les notations du cours. m désigne la mesure $\frac{1}{2\pi}\lambda$, où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. On note $C(\mathbb{T})$ l'espace des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, continues et 2π périodiques. Pour $1 \leq p < +\infty$, $\mathcal{L}^p(\mathbb{T})$ est l'espace des fonctions mesurables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, telles que $\|f\|_p := \left(\int_{[-\pi,\pi]} |f|^p \, \mathrm{d}m\right)^{1/p} < +\infty$ et $f(t+2\pi) = f(t)$, m-presque partout. $\mathrm{L}^p(\mathbb{T})$ est l'espace des classes des éléments de $\mathcal{L}^p(\mathbb{T})$ modulo l'égalité m-presque partout. On note $e_k(t) := \mathrm{e}^{ikt}$ et on rappelle que la famille $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de l'espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{T})$. Pour $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$, ses coefficients de Fourier sont définis par

$$c_k(f) := \int_{[-\pi,\pi]} f(t)\mathrm{e}^{-ikt} \, \mathrm{d}m(t), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

1) Montrer que si $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{T})$ a tous ses coefficients de Fourier nuls, alors f est nulle (i.e. est la classe d'équivalence des fonctions nulles presque partout). *Indication* : exprimer $\|f\|_2^2$ en fonction des $c_k(f)$ (identité de Plancherel).

La suite du problème est indépendante de cette question et on y suppose seulement que f est dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ et que $c_k(f) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

2) En utilisant le théorème de Fejér, démontrer que

$$\forall g \in C(\mathbb{T}), \quad \int_{[-\pi,\pi]} fg \, \mathrm{d}m = 0.$$

Indication : si h est combinaison linéaire finie des e_k, $\int_{[-\pi,\pi]} fh \, \mathrm{d}m = 0$.

3) On fixe $-\pi \leq a < b \leq \pi$. Construire une suite (g_n) de fonctions continues sur $[-\pi, \pi]$, nulles sur $[-\pi, a] \cup [b, \pi]$, telles que $0 \leq g_n \leq \mathbf{1}_{]a,b[}$ et (g_n) converge simplement vers $\mathbf{1}_{]a,b[}$. Il est recommandé d'illustrer cette construction par un dessin.

4) Déduire des deux questions précédentes que

$$\forall a, b \in [-\pi, \pi], \quad \int_{]a,b[} f \, \mathrm{d}m = 0.$$

5) On suppose que f est à valeurs réelles et on note f^+ et f^- la partie positive et la partie négative de la restriction de f à $[-\pi, \pi]$. On note μ et ν les mesures de densités respectives f^+ et f^- par rapport à m. Montrer que $\mu = \nu$ (il suffit de montrer que μ et ν coïncident sur la tribu borélienne de l'intervalle *ouvert* $]-\pi, \pi[$, puisque m ne charge pas les singletons).

6) En déduire que $f^+ = f^-$ m-presque partout. *Indication* : Soit $A := \{f^+ < f^-\}$. Prouver que $m(A) = 0$ en vérifiant que A est l'union croissante des ensembles $A_n := \{f^+ + 1/n \leq f^-\}$ et en montrant que $m(A_n) = 0$. On pourra admettre que les A_n et A sont des boréliens de $[-\pi, \pi]$.

7) Conclure dans le cas général où f est à valeurs complexes.