Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IFP **Année 2001-2002**

Examen, 7 juin 2002

Conditions de déroulement de l'épreuve :
Durée : 4 heures. Les calculatrices sont interdites.
Liste exhaustive des documents autorisés :

1. polycopié de DEUG *Introduction au calcul des probabilités.*
2. documents imprimés distribués en *cours* d'IFP ce semestre (à l'exclusion des corrigés de devoirs).
3. une feuille *manuscrite* recto verso format standard A4, pouvant contenir des extraits du cours à votre choix, à l'exclusion de tout corrigé d'exercice.

Le barème n'est donné qu'à titre indicatif pour vous aider à gérer votre temps et n'a pas valeur contractuelle.

Exercice I (*4 points*)

On note λ_2 la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$. Soit B un borélien tel que $\lambda_2(B) > 0$. La loi uniforme sur B est la mesure de probabilité de densité (par rapport à λ_2) $f = (\lambda_2(B))^{-1}\mathbf{1}_B$. Soit (U, V) un vecteur aléatoire de loi uniforme sur le disque

$$D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2;\ u^2 + v^2 < 1\}.$$

Pour a et b constantes positives, on pose $(X, Y) = (aU, bV)$.

1) Montrer que (X, Y) suit la loi uniforme sur

$$\Delta := \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1\Big\}.$$

2) Calculer les densités (par rapport à λ_1) des lois de X et de Y. Que valent $\mathbf{E}X$ et $\mathbf{E}Y$? Pouvait-on prévoir le résultat ? Expliquer brièvement pourquoi $\mathbf{E}|X|^n < +\infty$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

3) Vérifier que le rectangle $R = \big]a/\sqrt{2},\, a\big[\times \big]b/\sqrt{2},\, b\big[$ est disjoint de Δ. En déduire sans calcul $P_{(X,Y)}(R)$ (on note $P_{(X,Y)}$ la loi de (X, Y)). Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

4) Calculer $\mathbf{E}(XY)$ et $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Exercice II (*3 points*)

On note λ_3 la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^3$. Calculer l'intégrale

$$I := \int_D \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{z} \right) \mathrm{d}\lambda_3(x,y,z),$$

où $D := \big\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 < 1,\ \sqrt{x^2+y^2} < z \big\}$.

On utilisera pour cela le changement de variable donné par le C^1 difféomorphisme φ du passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées sphériques :

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x \geq 0,\ y = 0\} \longrightarrow]0,+\infty[\times]0,2\pi[\times \left] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[,$$

dont l'inversion $\varphi^{-1}(r,s,t) = (x,y,z)$ est donnée par

$$\begin{cases} x &= r\cos s \cos t \\ y &= r \sin s \cos t \\ z &= r \sin t \end{cases}$$

Exercice III (*3 points*)

Toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. On note $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi de densité :

$$f(t) = \mathrm{e}^{-t}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

1) Montrer que Y_1 est $\mathbf{P}$-intégrable et calculer $\mathbf{E}Y_1$.

2) On pose $T_n := \sum_{k=1}^n Y_k$. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\mathbf{P}(T_n > 0) = 1$. On note $A := \{\omega \in \Omega;\ \exists N = N(\omega), \forall n \geq N, T_n(\omega) > 0\}$. Montrer que $\mathbf{P}(A) = 1$.

3) On note $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi, $\mathbf{P}$-intégrables et telles que $\mathbf{E}X_1 = 0$ et on pose $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$. On définit la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par

$$Z_n(\omega) := \begin{cases} \dfrac{S_n(\omega)}{T_n(\omega)} & \text{si } T_n(\omega) > 0, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que Z_n converge presque-sûrement vers 0.

Problème I (*8 points*)

Le but de ce problème est de montrer que les mesures finies sur $\mathbb{R}^+$ sont caractérisées par leur transformée de Laplace. Pour μ mesure finie sur $(\mathbb{R}^+, \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^+))$, cette transformée est la fonction

$$M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \quad s \mapsto M(s) := \int_{[0,+\infty[} \mathrm{e}^{-sy}\, \mathrm{d}\mu(y). \tag{1}$$

1) Pour $\alpha > 0$, on note Y_α une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre α. On rappelle que $\mathbf{E}Y_\alpha = \alpha$ et $\operatorname{Var} Y_\alpha = \alpha$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbf{P}\left(\frac{|Y_\alpha - \alpha|}{\alpha} \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2\alpha}. \tag{2}$$

2) On note G_α la fonction de répartition de la variable aléatoire $\frac{Y_\alpha}{\alpha}$. En utilisant (2), montrer que

$$\lim_{\alpha\to+\infty} G_\alpha(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 1, \\ 0 & \text{si } t < 1. \end{cases} \tag{3}$$

On ne vous demande pas d'étudier le cas $t = 1$.

3) Vérifier que

$$\forall t \geq 0, \quad G_\alpha(t) = \sum_{k=0}^{[\alpha t]} \frac{\mathrm{e}^{-\alpha}\alpha^k}{k!}, \tag{4}$$

où $[x]$ désigne la partie entière du réel x.

4) Soit μ une mesure définie sur $(\mathbb{R}^+, \operatorname{Bor}(\mathbb{R}^+))$, telle que $c := \mu(\mathbb{R}^+) < +\infty$ et M sa transformée de Laplace définie par (1). Montrer que M est continue sur $[0, +\infty[$ (continue à droite en 0), que M est indéfiniment dérivable sur $]0, +\infty[$ et que

$$\forall s > 0, \qquad M^{(k)}(s) = (-1)^k \int_{[0,+\infty[} y^k \mathrm{e}^{-sy}\, \mathrm{d}\mu(y).$$

5) Par linéarité de l'intégrale, on a pour $s > 0$ et $x \geq 0$,

$$\begin{aligned} H(s,x) &:= \sum_{k=0}^{[sx]} \frac{(-1)^k}{k!} s^k M^{(k)}(s) \\ &= \int_{[0,+\infty[} \sum_{k=0}^{[sx]} \frac{(sy)^k}{k!} \mathrm{e}^{-sy}\, \mathrm{d}\mu(y) \\ &= \mu(\{0\}) + \int_{]0,+\infty[} G_{sy}\left(\frac{x}{y}\right) \mathrm{d}\mu(y). \end{aligned}$$

On suppose que $\mu(\{x\}) = 0$. Montrer qu'alors

$$H(s,x) \xrightarrow[s\to+\infty]{} \mu([0,x[) = \mu([0,x]). \tag{5}$$

6) Soient μ_1 et μ_2 deux mesures sur $(\mathbb{R}^+, \operatorname{Bor}(\mathbb{R}^+))$, finies et *diffuses* (autrement dit $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\mu_i(\{x\}) = 0$, $i = 1, 2$). On note M_1 et M_2 leurs transformées de Laplace respectives et on suppose que $M_1 = M_2$. Montrer que $\mu_1 = \mu_2$.

7) Généraliser en supprimant l'hypothèse que les mesures sont diffuses. On rappelle qu'une fonction de répartition n'a qu'un ensemble au plus dénombrable de discontinuités et est continue à droite en tout point.

Problème II (*8 points*)

Dans tout le problème, m désigne la mesure $\frac{1}{2\pi}\lambda$, où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. On note $C(\mathbb{T})$ l'espace des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, continues et 2π périodiques. Pour $1 \leq p < +\infty$, $\mathcal{L}^p(\mathbb{T})$ est l'espace des fonctions mesurables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, telles que $\|f\|_p := \big(\int_{[-\pi,\pi]} |f|^p \, \mathrm{d}m\big)^{1/p} < +\infty$ et $f(t+2\pi) = f(t)$, m-presque partout.

1) Vérifier que pour toute $h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$, on a

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \int_{[-\pi,\pi]} h \, \mathrm{d}\mu = \int_{[-\pi-a,\pi-a]} h \, \mathrm{d}\mu.$$

En déduire que si $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{T})$ (avec $1 \leq p < +\infty$), alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application

$$f(x + \,.\,) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto f(x+t)$$

est aussi un élément de $\mathcal{L}^p(\mathbb{T})$ et que $\|f(x + \,.\,)\|_p = \|f\|_p$.

2) Montrer que pour toute $h \in C(\mathbb{T})$ et tout $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \to x_0} \int_{[-\pi,\pi]} \big|h(x+t) - h(x_0+t)\big|^2 \, \mathrm{d}m(t) = 0.$$

3) En utilisant la densité de $C(\mathbb{T})$ dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{T})$, montrer que pour toute $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{T})$

$$\lim_{x \to x_0} \int_{[-\pi,\pi]} \big|f(x+t) - f(x_0+t)\big|^2 \, \mathrm{d}m(t) = 0.$$

4) Soit $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{T})$, on pose

$$g(x) := \int_{[-\pi,\pi]} f(x+t)\overline{f(t)} \, \mathrm{d}m(t), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Montrer que g est bien définie sur tout $\mathbb{R}$ et 2π-périodique. Déduire de la question 2) qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$.

5) On rappelle la définition des coefficients de Fourier d'une fonction $h \in \mathcal{L}(\mathbb{T})$:

$$c_n(h) := \int_{[-\pi,\pi]} \mathrm{e}^{-int} h(t) \, \mathrm{d}m(t) = \int_{[-\pi-a,\pi-a]} \mathrm{e}^{-iny} h(y) \, \mathrm{d}m(y), \qquad n \in \mathbb{Z},$$

la deuxième égalité, vraie pour tout $a \in \mathbb{R}$, résultant de la question 1). Exprimer les $c_n(g)$ en fonction des $c_n(f)$.

6) En déduire que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k(g)| < +\infty,$$

puis, que la série de Fourier de g converge dans l'espace $C(\mathbb{T})$, c'est à dire uniformément sur $[-\pi, \pi]$ vers une fonction continue g_1.

7) En observant que g est aussi élément de $\mathcal{L}^2(\mathbb{T})$, on voit que la série de Fourier de g converge au sens L^2 vers g (pourquoi ?). En déduire que $g = g_1$ presque partout.

8) Montrer que si deux fonctions *continues* sur $[-\pi, \pi]$ sont égales λ presque-partout, elles sont égales partout. En déduire que g est la somme de sa série de Fourier, avec convergence uniforme, autrement dit que les sommes partielles $S_n(g)$ de la série de Fourier convergent uniformément sur $[-\pi, \pi]$ vers g.