Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IFP **Année 2001-02**

Devoir surveillé, 30 mars 2002

Conditions de déroulement de l'épreuve :
Durée : 4 heures.
Les calculatrices sont interdites.
Liste exhaustive des documents autorisés :

1. polycopié de DEUG *Introduction au calcul des probabilités*
2. documents imprimés distribués en *cours* d'IFP ce semestre (à l'exclusion des corrigés de devoirs)
3. une feuille *manuscrite* recto verso format standard A4, pouvant contenir des extraits du cours à votre choix, à l'exclusion de tout corrigé d'exercice.

Le barème n'est donné qu'à titre indicatif pour vous aider à gérer votre temps et n'a pas valeur contractuelle.

Exercice I (*3 points*)

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et $(A_k)_{k\geq 1}$ une suite dans $\mathcal{F}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, on note B_n l'ensemble des $\omega \in \Omega$ appartenant à au moins n des ensembles A_k.

1) Montrer que B_n est un élément de la tribu $\mathcal{F}$ et que

$$n\mu(B_n) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k).$$

Indication : on pourra utiliser la série : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{1}_{A_k}$.

2) On suppose que $\sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k) < +\infty$. Quel résultat retrouve-t-on en faisant tendre n vers l'infini ?

Exercice II (*6 points*)

Cet exercice introduit la fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et applique cet outil à un problème de truquage de dés. On note $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. On rappelle qu'une variable aléatoire *discrète* définie sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est une application $\mathcal{F}$-Bor($\mathbb{K}$) mesurable et telle que $X(\Omega)$ soit une partie au plus dénombrable de $\mathbb{K}$.

1) Soit X une application $\Omega \to \mathbb{N}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X^{-1}(\{n\}) \in \mathcal{F}. \tag{1}$$

Montrer que X est une application $\mathcal{F}$-$\mathcal{P}(\mathbb{N})$ mesurable et qu'on peut aussi la considérer comme une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{R}$ (au sens rappelé ci-dessus) telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$. Dans toute la suite, nous appelerons *variable aléatoire entière* une application $X : \Omega \to \mathbb{N}$ vérifiant (1).

Vérifier que si $(\Omega', \mathcal{G})$ est un espace mesurable et f une application *quelconque* $\mathbb{N} \to \Omega'$, l'application $f \circ X$ est $\mathcal{F}$-$\mathcal{G}$ mesurable *quelle que soit la tribu* $\mathcal{G}$ sur Ω'.

2) Soit z un nombre complexe fixé et $X : \Omega \to \mathbb{N}$ une variable aléatoire entière. Expliquer brièvement pourquoi l'application

$$z^X : \Omega \to \mathbb{C}, \quad \omega \mapsto z^{X(\omega)}$$

est une variable aléatoire discrète à valeurs complexes[1]. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur z et la loi de X pour qu'elle soit $\mathbf{P}$-intégrable. En déduire que le domaine de définition D de la *fonction génératrice* G_X de X

$$G_X : z \mapsto G_X(z) := \mathbf{E}(z^X),$$

contient au moins le disque unité fermé du plan complexe.

Justifier la relation

$$\forall z \in D, \quad G_X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n) z^n.$$

En déduire que deux variables aléatoires entières ont même fonction génératrice si et seulement si elles ont même loi.

Lorsque l'ensemble des valeurs possibles de X est fini, on remarque que G_X se réduit à un polynôme et est définie sur tout le plan complexe (exemple : loi uniforme, loi binomiale,...).

3) Soit X une variable aléatoire discrète dont l'ensemble des valeurs possibles $X(\Omega)$ est inclus dans $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Vérifier que l'on a la factorisation :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad G_X(z) = zQ_X(z),$$

où Q_X est un polynôme. Expliquer pourquoi si $\mathbf{P}(X = 6) \neq 0$, Q_X a au moins une racine réelle. Expliciter $Q_X(z)$ et donner sa factorisation complète lorsque X suit la loi uniforme sur $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

4) Soient X et Y deux variables aléatoires entières indépendantes (ceci équivaut à l'indépendance des événements $\{X = k\}$ et $\{Y = l\}$ pour tout couple d'entiers (k, l)). Montrer que pour tout z de module inférieur ou égal à 1 on a :

$$G_{X+Y}(z) = G_X(z)G_Y(z)$$

[1] On adopte la convention usuelle pour les polynômes et les séries entières : $z \mapsto z^0$ est la fonction constante égale à 1 sur $\mathbb{C}$ (y compris au point $z = 0$).

et que cette relation est valable pour tout complexe z lorsque $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont des parties finies de $\mathbb{N}$.

5) On dispose de deux dés et on aimerait truquer individuellement chacun d'eux de façon que la somme des points suive la loi uniforme sur $\{2, 3, \dots, 12\}$. Déduire des questions précédentes que ceci est impossible.
Indications : On utilisera en le redémontrant le fait que la fonction génératrice de la loi uniforme sur $\{2, 3, \dots, 12\}$ n'admet aucune racine dans $\mathbb{R}^*$.

Précisons ce que l'on entend par truquage *individuel* de chaque dé. Il s'agit d'une méthode de truquage qui préserve l'indépendance du comportement des deux dés. Par exemple, on peut déplacer le centre de gravité de chaque dé en incluant des morceaux de plomb dans le dé, cela ne modifiera pas l'indépendance des deux dés. Par contre si on dissimule un aimant sous une face d'un dé et du fer (ou un autre aimant) sous une face de l'autre dé, les comportements des deux dés ne seront plus indépendants. La traduction mathématique de cette idée de truquage individuel est la suivante. Si X et Y sont les variables aléatoires égales aux points marqués par chaque dé après truquage, elles restent indépendantes (mais bien sûr, il n'y a plus de raison de supposer qu'elles suivent encore une loi uniforme sur $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ni qu'elles aient même loi).

Problème (*11 points*)

Dans tout le problème, $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ est un espace mesuré et f une application $\Omega \to \mathbb{R}_+$, $\mathcal{F}$-Bor$(\mathbb{R}_+)$ mesurable telle que $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu < +\infty$. Le but du problème est d'établir la formule

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = \int_{]0,+\infty[} \mu(\{f \geq t\}) \,\mathrm{d}\lambda(t), \tag{2}$$

où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Cette formule se démontre assez facilement lorsque l'on dispose du théorème de Fubini. On vous demande d'utiliser l'approche alternative exposée à partir de la question 2) ci-dessous. La question 1) a pour but d'établir une propriété classique des discontinuités d'une fonction monotone.

1) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction croissante. On rappelle qu'en tout point c intérieur à I, g a une limite à gauche notée $g(c^-)$ et une limite à droite notée $g(c^+)$ et que $g(c^-) \leq g(c) \leq g(c^+)$. On note

$$\mathrm{s}(g, c) := g(c^+) - g(c^-).$$

On dit que c est un *point de saut* pour g si $\mathrm{s}(g, c) \neq 0$.

Pour a et b tels que $a < b$ et $[a, b] \subset I$, on pose

$$D_n(a, b) := \Big\{x \in]a, b[;\ \mathrm{s}(g, x) \geq \frac{1}{n}\Big\}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

i) Montrer que $D_n(a, b)$ est un ensemble fini (éventuellement vide).

ii) En déduire que l'ensemble des points de saut de g sur I est au plus dénombrable et que g est continue λ-presque partout sur I. Que peut-on dire du cas où g est décroissante ?

2) Dans toute la suite du problème, on définit pour $t \geq 0$, l'ensemble noté A_t ou $A(t)$ par

$$A_t = A(t) := \{\omega \in \Omega;\ f(\omega) \geq t\}.$$

a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, A_t est un élément de la tribu $\mathcal{F}$.

b) Montrer que pour tout $t > 0$, $\mu(A_t) < +\infty$.

c) Montrer que l'application $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}_+$, $t \mapsto \mu(A_t)$ est décroissante.

d) Montrer qu'elle est continue à gauche en tout point t de $]0, +\infty[$.

3) Dans le cas particulier où f est à valeurs dans $\mathbb{N}$, montrer que

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \mu(A_j) = \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu.$$

4) Revenant au cas général, on pose $f_n(\omega) := 2^{-n}[2^n f(\omega)]$ où la notation $[x]$ désigne la partie entière du réel x, c'est-à-dire l'unique entier m tel que $m \leq x < m+1$.

a) Montrer que : $\displaystyle\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu$.

b) Montrer que : $\displaystyle 2^n \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{+\infty} \mu\big(A(j2^{-n})\big)$.

c) Montrer la formule (2). *Indication :* On pourra utiliser la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ définies par

$$\varphi_n :]0, +\infty[\to \mathbb{R}^+, \quad t \mapsto \varphi_n(t) := \sum_{j=1}^{+\infty} \mu\big(A(j2^{-n})\big) \mathbf{1}_{](j-1)2^{-n}, j2^{-n}]}(t).$$

d) Peut-on remplacer dans (2) $]0, +\infty[$ par $[0, +\infty[$, $\mu(\{f \geq t\})$ par $\mu(\{f > t\})$?