Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IFP **Année 2001-2002**

Devoir n° 3
À rendre dans la semaine du 25 mars 2002

Problème

Première partie

Dans cette partie on considère un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Soit $A \in \mathcal{F}$, on dit qu'une propriété $\pi(x)$ est vraie μ-presque partout (μ-p.p.) sur A si l'ensemble $\{x \in A;\ \pi(x) \text{ fausse}\}$ est un élément de $\mathcal{F}$ de mesure nulle.

I.1. Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables définies sur Ω et à valeurs réelles. Expliquer pourquoi l'ensemble L des $x \in \Omega$ tels que $(f_n(x))$ ait une limite positive est un élément de $\mathcal{F}$.

I.2. Soit $B \in \mathcal{F}$ et h une fonction mesurable positive p.p. sur B. Montrer que

$$\int_B h \,\mathrm{d}\mu = 0 \ \Rightarrow h = 0 \ \mu\text{-p.p. sur } B.$$

I.3. Soient $A \in \mathcal{F}$, f et g deux fonctions intégrables sur A telles que pour tout $B \in \mathcal{F}$ et inclus dans A, $\int_B f \,\mathrm{d}\mu = \int_B g \,\mathrm{d}\mu$. Montrer que $f = g$ μ-p.p. sur A.

Deuxième partie

Dans toute la suite du problème, l'espace mesuré est $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ où $\mathcal{B}$ est la tribu borélienne et λ est la mesure de Lebesgue. On rappelle que λ est invariante par translation. L'objectif de cette partie est de prouver que pour tout borélien *borné* A, on a

$$\lim_{y \to 0} \int_{\mathbb{R}} |\mathbf{1}_A(x) - \mathbf{1}_A(x+y)| \,\mathrm{d}\lambda(x) = 0. \qquad (\star)$$

II.1. Prouver $(\star)$ dans le cas où A est un intervalle ouvert.

II.2. On considère maintenant le cas où $A = \cup_{n \in \mathbb{N}} J_n$, les J_n étant des intervalles ouverts deux à deux disjoints.

1. Justifier les majorations suivantes :

$$\int_{\mathbb{R}} |\mathbf{1}_A(x) - \mathbf{1}_A(x+y)| \,\mathrm{d}\lambda(x) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} |\mathbf{1}_{J_n}(x) - \mathbf{1}_{J_n}(x+y)| \,\mathrm{d}\lambda(x)$$
$$\leq \sum_{n=0}^{+\infty} 2\lambda(J_n) = 2\lambda(A) < +\infty.$$

2. Démontrer ($\star$) en considérant une suite $(y_p)_{p\in\mathbb{N}}$ quelconque tendant vers 0. *Indications :* Considérer les séries qui interviennent au (1) comme des intégrales relativement à la mesure de comptage de $\mathbb{N}$.

II.3. Pour passer au cas général, on rappelle que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est une réunion dénombrable d'intervalles ouverts disjoints et que si A est borélien borné, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ouvert J tel que $A \subset J$ et $\lambda(J \setminus A) < \varepsilon$. Compte tenu de ces indications, prouver que pour toute suite $(y_p)_{p\in\mathbb{N}}$ tendant vers 0 on a :

$$\limsup_{p\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} |\mathbf{1}_A(x) - \mathbf{1}_A(x+y_p)| \,\mathrm{d}\lambda(x) \leq 2\varepsilon.$$

Conclure.

Troisième partie

III.1. Pour A borélien borné justifier les égalités suivantes :

$$\int_A \mathrm{e}^{inx} \,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_A(x)\mathrm{e}^{inx} \,\mathrm{d}\lambda(x) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_A(x)(\mathrm{e}^{inx} - \mathrm{e}^{in(x-\pi/n)}) \,\mathrm{d}\lambda(x)$$
$$= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{inx}(\mathbf{1}_A(x) - \mathbf{1}_A(x+\pi/n)) \,\mathrm{d}\lambda(x).$$

III.2. En déduire que pour tout borélien $A \subset [0; 2\pi]$:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_A \cos nx \;\mathrm{d}\lambda(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_A \sin nx \;\mathrm{d}\lambda(x) = 0.$$

III.3. Soit $u = (n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante d'entiers positifs. On note E_u l'ensemble des $x \in [0; 2\pi]$ tels que $(\sin n_k x)$ converge. Montrer que $\lambda(E_u) = 0$. *Indication* : $2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$; montrer que $(\sin n_k x)$ converge p.p. vers $\pm 2^{-1/2}$ sur E_u ; utiliser tout **I** et **III.2**.

III.4. On note F l'ensemble des $x \in [0; 2\pi]$ pour lesquels il existe une suite $u = (n_k)$ strictement croissante d'entiers telle que $(\sin n_k x)$ converge.

1. Montrer que $F = [0, 2\pi]$. (En trois ligne maximum).
2. On a $F = \cup_{u\in\mathcal{N}} E_u$ où $\mathcal{N}$ désigne l'ensemble des suites strictement croissantes d'entiers. Y a-t-il une contradiction entre $\lambda(F) = 2\pi$ et $\forall u \in \mathcal{N}, \lambda(E_u) = 0$?

Exercice

Soient $(X_n)_{n\in N}$ une suite de variables aléatoires réelles (v.a.r.) définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On dit que ces v.a.r. sont *indépendantes* si et seulement si pour tout $I \subset \mathbb{N}$ fini et pour toute collection $(B_i)_{i\in I}$ de boréliens de $\mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i\in I} X_i^{-1}(B_i)\Big) = \prod_{i\in I} \mathbb{P}\big(X_i^{-1}(B_i)\big).$$

Une v.a.r X est dite de *loi uniforme sur* $[a, b]$ $(a < b)$ si pour tout borélien B,

$$\mathbb{P}(X^{-1}(B)) = \frac{\lambda(B \cap [a, b])}{\lambda([a, b])},$$

où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$.

Soit θ un réel strictement positif et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, chacune de loi uniforme sur $[0, \theta]$.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = \max_{k\in\{1,\dots,n\}} X_n$. Pourquoi Y_n ainsi définie est-elle une variable aléatoire ? Calculer sa fonction de répartition F_n.

2) Justifier l'existence de l'espérance de Y_n et la calculer en admettant la formule suivante, valable pour une variable aléatoire p.s. positive Z :

$$\mathbb{E}(Z) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Z > t)\,\mathrm{d}t.$$

3) Montrer que Y_n converge p.s., c'est-à-dire $\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} Y_n = Y) = 1$ pour une certaine variable aléatoire Y que l'on explicitera.

4) Donner les justifications manquantes dans l'argument suivant : « $\mathbb{E}Y_n$ converge vers θ, donc $\mathbb{E}Y = \theta$ et comme $Y \leq \theta$ p.s., $Y = \theta$ p.s. »